МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
імені О. М. Бекетова

Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова,
Ю. В. Ситникова

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

В СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ

ЧАСТИНА 2

**Навчальний довідник
для самостійного вивчення курсу вищої математики
(для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання
за напрямами підготовки 6.060101 – Будівництво,
6.050702 – Електромеханіка», 6.050701 – Електротехніка
та електротехнології)**

Харків – 2016

Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 2 : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 – Будівництво, 6.050702 – Електромеханіка, 6.050701 – Електротехніка та електротехнології) / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 141 с.

Автори : Г. А. Кузнецова,
С. М. Ламтюгова,
Ю. В. Ситникова

Рекомендовано для студентів будівельних, електромеханічних та електротехнічних спеціальностей як додатковий допоміжний матеріал для самостійного вивчення теми «Основи математичного аналізу» в процесі вивчення курсу вищої математики.

Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Л. Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 3 від 28 жовтня 2015 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

У довіднику викладено теоретичний матеріал щодо основ математичного аналізу за такими темами: «Інтегральне числення», «Застосування інтегралів», «Диференціальні рівняння», які входять до курсу вищої математики для студентів 1, 2 курсів будівельних, електромеханічних та електротехнічних спеціальностей денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 – Будівництво, 6.050702 – Електромеханіка, 6.050701 – Електротехніка та електротехнології.

Довідник «Основи математичного аналізу (частина 2)» складається з 3 розділів: «Інтегральне числення»; «Застосування інтегралів»; «Диференціальні рівняння» та додатків.

Теоретичний матеріал представлено у вигляді опорних таблиць, які містять: визначення основних понять та формули, коментарі, зауваження, рисунки, приклади розв’язання типових задач з застосуванням зазначеного теоретичного матеріалу.

У додатках подано окремі визначення, теореми та задачі, розв’язання яких викликає труднощі, або є допоміжним матеріалом під час розв’язання більш складних задач.

ІЗ ІСТОРІЇ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Інтегральне числення виникло завдяки розгляду великої кількості задач математики та природознавства. Найважливішою з них – фізична задача визначення шляху подоланого за певний час руху за відомою, але, можливо, змінною швидкістю та значно давніша задача визначення площини та об’єму геометричної фігури. Під інтегральним численням розуміють розділ математичного аналізу, який вивчає інтеграли функцій та їх застосування.

Основним в інтегральному численні є поняття интегралу, яке, однак, має два різних трактування, та призводить відповідно до таких понять, як невизначений та визначений інтеграли.

До обчислення визначених інтегралів зводяться задачі про вимір площ, обмежених кривими (задачі «знаходження квадратур»), довжин дуг кривих («спрямлення кривих»), площ поверхонь тіл, об'ємів тіл («знаходження кубатур»), а також задачі визначення координат центрів ваги , моментів інерції, шлях тіла по відомій швидкості руху, роботи, виробленої силою, і багато інших задач природознавства і техніки.

Фактичне обчислення визначених інтегралів здійснюється різними способами. В окремих випадках визначений інтеграл можна знайти, безпосередньо обчислюючи границі відповідної інтегральної суми. Однак здебільшого такий перехід до границі складний. Деякі визначені інтеграли можливо обчислювати за допомогою попереднього відшукання невизначених інтегралів. Як правило ж, доводиться вдаватися до наближеного обчислення визначених інтегралів, застосовуючи різні Квадратурні формули, наприклад, трапецій формулу (див. Трапецій формула), Сімпсона формулу (див. Сімпсона формула). Таке наближене обчислення може бути здійснене на ЕОМ з абсолютною похибкою, що не перевищує будь-якого заданого малого позитивного числа. У випадках, які не вимагають великої точності, для наближеного обчислення певних інтегралів застосовують графічні методи (див. Графічні обчислення).

Зачатки інтегрального числення можна знайти в трудах Архімеда (287 р. до н. е. – 212 р. до н. е.): у творі «Про вимірювання довжини кола» розглядається питання про визначення довжини та площі кола та круга, а в трактаті «Про шар та циліндр» – про поверхні та об’єми деяких тіл. Для вирішення цих задач Архімед застосовував метод вичерпування Євдокса Книдського (приблизно 408 р. до н. е. – 355 р. до н. е.). Таким чином, інтегральне числення виникло завдяки потребі створення загального методу знаходження площі, об’ємів і центрів тяжіння.

Труди Архімеда, вперше видані в 1544 р. (на латинській та грецькій мовах), почали привертати увагу, та їх вивчення виявилося одним з важливіших кроків до розвитку інтегрального числення. Архімед передбачив багато ідей інтегрального числення. Але пройшло більш ніж півтори тисячі років, доки ці ідеї знайшли чітке формулювання та були доведені до рівня числення. Математики XVII століття, отримавши багато нових результатів, вчилися на трудах Архімеда. Активно використовувався й інший метод – метод неподільних, який також зародився в Давній Греції. Наприклад, криволінійну трапецію вони уявляли собі як складену з вертикальних відрізків довжиною $f(x)$, яким приписували площу, що дорівнювала нескінченно малій величині $f(x)dx$. Відповідно до такого розуміння шукана площу вважалась такою, що дорівнює сумі: $S=\sum\limits_{a<x<b} f(x)dx$ нескінченно великого числа не скінченно малих площ. Іноді, навіть підкреслювали, що окремі доданки в цій сумі нулі, але нулі особливого роду, які складені в нескінчене число й дають визначену додатну суму. Саме на такій, з сьогоднішнього погляду, сумнівній основі І. Кеплер (1571 –1630) у своїх працях «Нова астрономія» (1609) та «Стереометрія винних бочок» (1615) правильно обчислив деякі площі (наприклад, площу фігури обмеженої еліпсом) та об'ємів (тіло розрізане на нескінченно тонкі пластинки). Ці дослідження було продовжено італійськими математиками Б. Кавал'єрі (1598 –1647) та Е. Торрічеллі (1608 –1647).

У XVII ст. було зроблено багато відкриттів, стосовно інтегрального числення. Так, П. Ферма вже в 1629 році вирішив задачу квадратури будь-якої кривої $y=x^N$, де N - ціле (тобто вивів формулу $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$), завдяки цьому розв'язав задачі щодо знаходження центру тяжіння. І. Кеплер під час виведення своїх законів руху планет, фактично спирався на ідею наближеного інтегрування. І. Барроу (1603–1677), вчитель Ньютона, близько підійшов до розуміння зв'язку між інтегрування та диференціюванням, встановив взаємозв'язок між задачею про знаходження площі та задачею про знаходження дотичної. Велике значення мали роботи щодо представлення функції у вигляді степеневих рядів. Незважаючи на цінність отриманих результатів математиками XVII ст., числення як такого ще не було.

Необхідно було виділити загальні ідеї, які б знаходились в основі рішення багатьох частинних задач, а також встановити зв'язок між операціями диференціювання та інтегрування, надати точний алгоритм. Це зробили І. Ньютон та Лейбніц, які відкрили незалежно один від одного той факт, що відомий нам під назвою формули Ньютона-Лейбніца. Тим самим остаточно сформувався загальний метод, який дозволив І. Ньютону, Лейбніцу та їх учням розвити техніку інтегрування.

Історично під інтегралом розуміють площу криволінійної трапеції, утвореної заданою кривою $f(x)$ та віссю координат. Для знаходження цієї площі відрізок *ab* розбивають на *n* необов'язково рівних частин і будують сходинкову фігуру (на рисунку 1 вона заштрихована). Її площа дорівнює сумі нескінченого числа доданків, кожен з яких представляє собою площу криволінійних трикутників.

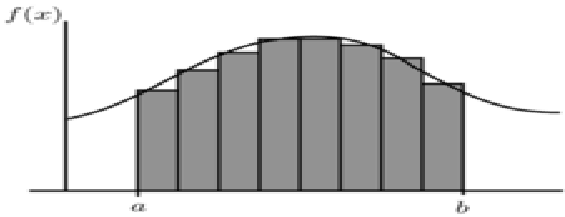


Рисунок 1. Геометрична інтерпретація інтегралу

Лейбніц ввів новий символ для суми нескінченого числа доданків «$\int$», як дещо змінену курсивну латинську «S» – першу букву лат. summa (сумма). Слово «інтеграл» походить від лат. Integralis – цілісний. Цю назву було запропоновано учнем Лейбніца Іоганном Бернуллі (1667–1748), щоб розрізняти «суму нескінченого числа доданків» від звичайної суми.

Надалі позначення Лейбніца удосконалював Ж. Фур'є (1768–1830). Він явно почав вказувати начальне і кінцеве значення для змінної інтегрування x: $\int\limits_a^b f(x)dx$, ввівши тим самим сучасне позначення визначеного інтегралу.

Попереду необхідно було ще навчитися знаходити первісні багатьох функцій, надати логічні основи нового числення і т. п. Але головне вже було зроблено: диференціальне та інтегральне численне створено.

Методи математичного аналізу активно розвиваються в наступному столітті (в першу чергу слід назвати імена Л. Ейлера, який завершив систематичне дослідження інтегрування елементарних функцій, та І. Бернуллі). У розвитку інтегрального числення взяли участь математики М. В. Остроградський (1801–1862), В. Я. Буняківський (1804–1889), П. Л. Чебишев (1821–1894). Свого теперішнього стану методи інтегрування в основному досягли в роботах Л. Ейлера, а розвиток методів завершили праці М. В. Остроградського та П. Л. Чебишева. Принципове значення мали, зокрема, результати П. Л. Чебишева, який довів, що існують інтеграли, які не можна виразити через елементарні функції. Суворий виклад теорії інтегралу з'явився тільки в XIX столітті. Рішення цієї задачі пов’язано з іменами О. Коши, одного з видатних математиків німецького вченого Б. Рімана (1826–1866), французького математика Г. Дарбу (1842–1917). Багато що в питанні про знаходження інтегралів в замкненій формі було вирішено в роботах Ж. Ліувілля (1809–1882). Відповіді на багато питань, щодо існування площ та об’ємів фігур, було отримано завдяки створеної К. Жорданом (1826–1922) теорії міри. Різноманітні узагальнення поняття інтегралу вже на початку XX століття були запропоновані французькими математиками А. Лебегом (1875–1941) та А. Данжуа (1884–1974). У 1930 р. А. І. Колмогоров (1903-1987) опублікував роботу, в якій охоплені всі інтеграли як границі різних інтегральних сум. Інтеграл А. І. Колмогорова знайшов застосування в математичній фізиці, при математичному обґрунтуванні квантової механіки. У розвиток поняття інтегралу, окрім А. І. Колмогорова, внесли великий науковий доробок і інші російські математики. Вони зробили першочергової важливості відкриття. Це А. А. Марков (1856-1922), А. М. Ляпунов, П. Н. Лузін (1883-1950), А. Я. Хінчін (1894-1959). У теорії функцій А. Я. Хінчін одночасно з Данжуа створив теорію апроксимативних похідних і узагальнив поняття інтеграла.

Таким чином, вивчаючи математичний аналіз, зокрема, розділ «Інтегральне числення», ми долучаємось до великого спадку та кропіткого надбання науковців декількох століть, та цінність якого для сьогоднішнього та наступних поколінь є значно більшим ніж ми можемо осягнути.

1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

1.1 Невизначений інтеграл

1.1.1 Властивості невизначеного інтегралу

№ п/п	Словесне формулювання	Аналітичний запис
1.	Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції	$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2.	Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу	$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3.	Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої	$\int dF(x) = F(x) + C$
4.	Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від окремих доданків	$\int \left(f(x) + g(x) - h(x)\right) dx =$ $= \int f(x)dx + \int g(x)dx -$ $- \int h(x)dx$
5.	Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак невизначеного інтеграла	$\int a\, f(x)dx = a \int f(x)dx$; $a = const \neq 0$
6.	Змінна інтегрування може бути як незалежною змінною, так і довільною неперервно диференційованою функцією	$\int f(x)dx = F(x) + C \;\Leftrightarrow$ $\int f(u)du = F(u) + C,$ $u = u(x)$

7.	Якщо підінтегральна функція лінійна відносно змінної інтегрування, за знак первісної виноситься коефіцієнт обернений до коефіцієнта при змінній	$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

1.1.2 Таблиця інтегралів

Основні невизначені інтеграли			
1.	$\int 0\,du = C$	5.	$\int \sin u\,du = -\cos u + C$
2.	$\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	6.	$\int \cos u\,du = \sin u + C$
2a.	$\int du = u + C$	7.	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\,u + C$
2б.	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8.	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\,u + C$
2в.	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	9.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
3.	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	10.	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+b}} = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2+b}\right\rvert + C$
4.	$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	11.	$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,arctg\frac{u}{a} + C$
4a.	$\int e^u\,du = e^u + C$	12.	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
Додаткові невизначені інтеграли			
1.	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + C$	2.	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
3.	$\int tg u\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	4.	$\int ctg u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
5.	$\int sh u\,du = ch u + C$	6.	$\int ch u\,du = sh u + C$

7.	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\, u + C$	8.	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -\, cth\, u + C$
9.	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\; du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln\left\| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\| + C$		
10.	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\; du = \frac{1}{a} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{u}{a} + C$		
11.	$\int e^{au} \sin bu\; du = \frac{-b e^{au} \cos bu + a e^{au} \sin bu}{a^2 + b^2} + C$		
12.	$\int e^{au} \cos bu\; du = \frac{a e^{au} \cos bu + b e^{au} \sin bu}{a^2 + b^2} + C$		

1.1.3 Основні методи інтегрування

1.1.3.1 Безпосереднє інтегрування

Обчислення інтегралів за допомогою безпосереднього використання таблиці інтегралів і основних властивостей невизначених інтегралів називається безпосереднім інтегруванням.

ПРИКЛАД 1. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2} dx$.

Розв'язання: Використаємо 4 та 5 властивості невизначеного інтеграла та 2 і 2а формули із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2} dx = \int (x^2 - 2x + 3) dx = \int x^2 dx - 2\int x dx +$$

$$+3\int dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 3x + C = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C\,.$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{x^2 + x\cdot 3^x - x\cos x}{x}dx .$$

<u>Розв'язання</u>: Використаємо 4 та 5 властивості невизначеного інтеграла та 2, 4 та 6 формули із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int \frac{x^2 + x\cdot 3^x - x\cos x}{x}dx = \int\left(\frac{x^2}{x} + \frac{x\cdot 3^x}{x} - \frac{x\cos x}{x}\right)dx = \int xdx +$$

$$+\int 3^x dx - \int \cos x\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} - \sin x + C .$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити інтеграл $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx$.

<u>Розв'язання</u>: Використаємо тригонометричні формули, 4 властивість невизначеного інтеграла та 7 і 2а формули із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C .$$

ПРИКЛАД 4. Обчислити інтеграл

$$\int\left(3\sin x + 7x^3 - 4 + \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{x}\right)dx .$$

<u>Розв'язання</u>: Використаємо 4 і 5 властивості невизначеного інтеграла та 6, 2, 2а і 11 формули із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int\left(3\sin x + 7x^3 - 4 + \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = 3\int \sin x\, dx + 7\int x^3 dx -$$

$$-4\int dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{x} = -3\cos x + 7\frac{x^4}{4} - 4x +$$

$$+2\mathrm{arctg}x - \ln|x| + C .$$

ПРИКЛАД 5. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{(25x-1)^2}$.

Розв'язання: Використаємо 6 і 7 властивості невизначеного інтеграла та 2в формулу із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int \frac{dx}{(25x-1)^2} = \frac{1}{25}\left(-\frac{1}{25x-1}\right) + C = -\frac{1}{25(25x-1)} + C.$$

ПРИКЛАД 6. Обчислити інтеграл

$$\int \left(\frac{2}{5x-1} + \frac{5}{\sqrt{3x+7}}\right) dx.$$

Розв'язання: Використаємо 4 – 7 властивості невизначеного інтеграла та 3 і 2б формули із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int \left(\frac{2}{5x-1} + \frac{5}{\sqrt{3x+7}}\right) dx = 2\int \frac{dx}{5x-1} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{3x+7}} =$$

$$= 2\frac{1}{5}\ln|5x-1| + 5\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3x+7} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\ln|5x-1| + \frac{10}{3}\sqrt{3x+7} + C.$$

ПРИКЛАД 7. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{4x^2+25}.$$

Розв'язання: Щоб привести до табличного вигляду, винесемо 4 за дужки, потім використаємо 5 властивість невизначеного інтеграла та 11 формулу із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int \frac{dx}{4x^2+25} = \int \frac{dx}{4\left(x^2 + \frac{25}{4}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + (5/2)^2} =$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{5/2}\operatorname{arctg}\frac{x}{5/2}+C=\frac{2}{4\cdot 5}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C=\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C$$

ПРИКЛАД 8. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

<u>*Розв'язання:*</u> Аналогічно прикладу 7 за 9 формулою із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{4}{9}-x^2\right)}}=\int\frac{dx}{3\sqrt{(2/3)^2-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2/3}+C=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.$$

ПРИКЛАД 9. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{2x^2-5}$.

<u>*Розв'язання:*</u> Аналогічно прикладам 7 і 8 за 12 формулою із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int\frac{dx}{2x^2-5}=\int\frac{dx}{2\left(x^2-5/2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{5/2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{5/2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5/2}}{x+\sqrt{5/2}}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{5}}{\sqrt{2}x+\sqrt{5}}\right|+C\cdot$$

ПРИКЛАД 10. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$.

<u>*Розв'язання:*</u> Виділимо в знаменнику повний квадрат і використаємо 11 формулу із таблиці інтегралів:

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\cdot$$

ПРИКЛАД 11. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{4-x^2-4x}$.

Розв'язання: Аналогічно прикладу 10 за 12 формулою із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int \frac{dx}{4-x^2-4x} = \int \frac{dx}{-(x^2+4x-4)} = -\int \frac{dx}{\left(x^2+2x\cdot 2+4\right)-4-4} =$$

$$= -\int \frac{dx}{\left(x+2\right)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{8}}{x+2+\sqrt{8}}\right| + C.$$

ПРИКЛАД 12. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$.

Розв'язання: Винесемо 2 за дужки, аналогічно прикладам 10 і 11 виділимо в знаменнику повний квадрат, використаємо 5 властивість невизначеного інтеграла та 12 формулу із таблиці основних невизначених інтегралів:

$$\int \frac{dx}{2x^2-3x+1} = \int \frac{dx}{2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-2x\cdot\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot(1/4)}\ln\left|\frac{x-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{x-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\right| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{2x-2}{2x-1}\right| + C.$$

1.1.3.2 Заміна змінної (підстановка)

1а. $$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left| \begin{matrix} u = \varphi(x); \\ du = \varphi'(x)dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int g(u)du = G(u) + C = \left|u = \varphi(x)\right| = G(\varphi(x)) + C .$$

1б. $$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(u); \\ dx = \varphi'(u)du \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)du =$$

$$= H(u) + C = \left| u = \varphi^{-1}(x) \right| = H\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C .$$

ПРИКЛАД 1. Обчислити інтеграл $\int \frac{xdx}{4x^2+1}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{xdx}{4x^2+1} = \left| \begin{matrix} t = 4x^2+1 \quad dt = 8xdx \\ dt/8 = xdx \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dt}{8}}{t} = \int \frac{dt}{8t} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = = \frac{1}{8}\ln|t| + C = \frac{1}{8}\ln\left|4x^2+1\right| + C .$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}} = \left| \begin{matrix} t = 9-8x^2 \\ dt = -16xdx \\ dt/(-16) = xdx \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dt}{-16}}{\sqrt{t}} =$$

$$= \int \frac{dt}{-16\sqrt{t}} = -\frac{1}{16}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{16}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\frac{1}{8}\sqrt{9-8x^2} + C .$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{\arccos 3xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Розв’язання: $\int \frac{\arccos 3x dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \arccos 3x \\ dt = -\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \\ \frac{dt}{-3} = \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} \end{array} \right| = \int \frac{tdt}{-3} =$

$$= -\frac{1}{3}\int tdt = -\frac{1}{3}\frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{6}\arccos^2 3x + C .$$

ПРИКЛАД 4. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}dx}{3x+1}$.

Розв’язання: $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}dx}{3x+1} = \left| \begin{array}{l} t = \ln(3x+1) \\ dt = \frac{3dx}{3x+1} \\ \frac{dt}{3} = \frac{dx}{3x+1} \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt[3]{t}dt}{3} =$

$$= \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}dt = \frac{1}{3}\int t^{1/3}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{4/3}}{4/3} + C = \frac{t^{4/3}}{4} + C = \frac{\sqrt[3]{\ln^4(3x+1)}}{4} + C .$$

ПРИКЛАД 5. Обчислити інтеграл $\int e^{2x^3-1} \cdot x^2 dx$.

Розв’язання: $\int e^{2x^3-1} \cdot x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x^3 - 1 \\ dt = 6x^2 dx \\ dt/6 = x^2 dx \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{6} =$

$$= \frac{1}{6}\int e^t dt = \frac{1}{6}e^t + C = \frac{1}{6}e^{2x^3-1} + C .$$

ПРИКЛАД 6. Обчислити інтеграл $\int \frac{e^{\mathrm{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$.

Розв'язання: $\int \frac{e^{\text{arctg}2x}}{1+4x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t=\text{arctg}2x \\ dt = \frac{2dx}{1+4x^2} \\ \frac{dt}{2} = \frac{dx}{1+4x^2} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{\text{arctg}2x} + C .$$

ПРИКЛАД 7. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2}{x^6+9}dx$.

Розв'язання: $\int \frac{x^2}{x^6+9}dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2dx \\ \frac{dt}{3} = x^2dx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t^2+9} =$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+3^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\text{arctg}\frac{t}{3} = \frac{1}{9}\text{arctg}\frac{x^3}{3} + C .$$

ПРИКЛАД 8. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

$$= \arcsin t + C == \arcsin(\ln x) + C .$$

ПРИКЛАД 9. Обчислити інтеграл

$$\int \sin^3 2x \cdot \cos 2x \, dx .$$

Розв'язання:

$$\int \sin^3 2x\cdot\cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} t=\sin 2x \\ dt = 2\cos 2x\,dx \\ \dfrac{dt}{2} = \cos 2x\,dx \end{array} \right| = \int t^3\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^3 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8}\sin^4 2x + C\,.$$

ПРИКЛАД 10. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}$

<u>*Розв'язання*</u>: $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\mathrm{tg}x}} = \left| \begin{array}{l} t=1+\mathrm{tg}x \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int \dfrac{dt}{\sqrt{t}} =$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+\mathrm{tg}x} + C\,.$$

ПРИКЛАД 11. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{\sin\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}}dx$.

<u>*Розв'язання*</u>: $\int \dfrac{\sin\sqrt{3x+1}\,dx}{\sqrt{3x+1}} = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{3x+1} \\ dt = \dfrac{3dx}{2\sqrt{3x+1}} \\ \dfrac{2dt}{3} = \dfrac{dx}{\sqrt{3x+1}} \end{array} \right| =$

$$= \frac{2}{3}\int \sin t dt = -\frac{2}{3}\cos t + C = -\frac{2}{3}\cos\sqrt{3x+1} + C\,.$$

ПРИКЛАД 12. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+2}}dx$.

<u>*Розв'язання*</u>: Розіб'ємо інтеграл на два. Для одного зробимо заміну змінної, другий – табличний.

$$\int\frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+2}}dx=\int\frac{2xdx}{\sqrt{3x^2+2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}=\begin{vmatrix} t=3x^2+2 \\ dt=6xdx \\ dt/3=2xdx \end{vmatrix}=\int\frac{dt/3}{\sqrt{t}}-$$

$$-\int\frac{dx}{\sqrt{3\left(x^2+\frac{2}{3}\right)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+(\sqrt{2/3})^2}}=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{t}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{2}{3}}\right|+C=\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{2}{3}}\right|+C.$$

ПРИКЛАД 13. Обчислити інтеграл $\int\frac{2x-1}{3x^2+2x-2}dx$.

<u>*Розв'язання:*</u> Виділимо в чисельнику похідну знаменника: $(3x^2+2x-2)'=6x+2$. Помноживши цю похідну на $1/3$, отримаємо вираз $2x+\frac{2}{3}$, тому віднімемо зайві $\frac{2}{3}$ і додамо -1:

$$2x-1=(6x+2)\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}(6x+2)-\frac{5}{3}.$$

$$\int\frac{2x-1}{3x^2+2x-2}dx=\int\frac{\frac{1}{3}(6x+2)-\frac{5}{3}}{3x^2+2x-2}dx=$$

Розіб'ємо інтеграл на два. Для одного зробимо заміну змінної, в другому в знаменнику виділимо повний квадрат і отримаємо табличний інтеграл

$$=\frac{1}{3}\int\frac{6x+2}{3x^2+2x-2}dx-\frac{5}{3}\int\frac{dx}{3x^2+2x-2}=\begin{vmatrix} t=3x^2+2x-2 \\ dt=(6x+2)dt \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\ln|t|-$$

$$-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{9}-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2+2x-2\right|-$$

$$-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{7}{9}}=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2+2x-2\right|-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2+2x-2\right|-\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}}{x+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2+2x-2\right|-\frac{5}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{3x+1-\sqrt{7}}{3x+1+\sqrt{7}}\right|+C\,.$$

1.1.3.3 Інтегрування частинами

Теорія	Приклади
Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні, тоді $$\int u\,dv=uv-\int v\,du\,.$$ Застосовувати цей метод доречно, коли підінтегральна функція представлена у вигляді добутки двох функцій, одна з яких є алгебраїчною, а друга трансцендентна (див. Додаток 1).	

<table>
<tr><td colspan="2">Як правило за u вибирають функцію, що знаходять у явному вигляді, та яка спрощується після диференціювання. За dv – частину яка залишається та задовольняє таким умовам: вона містить dx, вона інтегрована. Функцію v як одну з первісних $\int dv$ (поклавши $C=0$). Іноді метод необхідно застосовувати декілька разів.
Типовими застосуваннями методу інтегрування частинами є наступні випадки:</td></tr>
<tr><td>1. $\int P_n(x)e^{ax}dx$,
$\int P_n(x)a^{bx}dx$,
$\int P_n(x)\sin bx\,dx$,
$\int P_n(x)\cos bx\,dx$,
$\int P_n(x)\mathrm{ch}\,bx\,dx$,
$\int P_n(x)\mathrm{sh}\,bx\,dx$,
$\int P_1(x)\dfrac{1}{\sin^2 bx}dx$,
$\int P_1(x)\dfrac{1}{\cos^2 bx}dx$
де $P_n(x)$ - многочлен.
За u слід узяти $P_n(x)$: $u=P_n(x)$.</td><td>$\int (x^2+1)e^{3x}dx=\left\vert\begin{matrix} u=x^2+1 \\ dv=e^{3x}dx \end{matrix}\right\vert$,
$\int (x+3)\cdot 4^x dx=\left\vert\begin{matrix} u=x+3 \\ dv=4^x dx \end{matrix}\right\vert$,
$\int x\cos\dfrac{x}{2}dx=\left\vert\begin{matrix} u=x \\ dv=\cos\dfrac{x}{2}dx \end{matrix}\right\vert$,
$\int x^3\sin 4x\,dx=\left\vert\begin{matrix} u=x^3 \\ dv=\sin 4xdx \end{matrix}\right\vert$,
.
$\int \dfrac{x}{\cos^2 x}dx=\left\vert\begin{matrix} u=x \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix}\right\vert$</td></tr>
</table>

Теорія	Приклади
2. $\int P_n(x)\ln x dx$, $\int P_n(x)\arcsin bx\,dx$, $\int P_n(x)\arccos bx\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,bx\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\,bx\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arsh}\,bx\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arch}\,bx\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arth}\,bx\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcth}\,bx\,dx$. Функції $\mathrm{arsh}\,x$, $\mathrm{arch}\,x$, $\mathrm{arth}\,x$, $\mathrm{arcth}\,x$ називають оберненими гіперболічними функціями. За u слід взяти $\ln x$, $\arcsin bx$, $\arccos bx$, $\mathrm{arctg}\ bx$, $\mathrm{arcctg}\ bx$, $\mathrm{arsh}\ bx$, $\mathrm{arch}\ bx$, $\mathrm{arth}\ bx$, $\mathrm{arcth}\ bx$ відповідно.	$\int x\ln(x+1)dx = \begin{vmatrix} u=\ln(x+1) \\ dv = xdx \end{vmatrix}$, $\int \arcsin 2xdx = \begin{vmatrix} u=\arcsin 2x \\ dv = dx \end{vmatrix}$, $\int x\,\mathrm{arctg}3xdx = \begin{vmatrix} u=\mathrm{arctg}3x \\ dv = xdx \end{vmatrix}$.
3. $\int e^{\alpha x}\sin bx\,dx$, $\int e^{\alpha x}\cos bx\,dx$, $\int \sin\ln ax\,dx$, $\int \cos\ln ax\,dx$. У першому та другому інтегралах за u можна взяти будь-яку з двох функцій: показникову чи тригонометричну. У третьому та четвертому за u береться $\sin\ln ax$ або	$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \begin{vmatrix} u=e^{2x} \\ dv = \sin 3x\,dx \end{vmatrix}$ або $= \begin{vmatrix} u=\sin 3x \\ dv = e^{2x}dx \end{vmatrix}$,

$\cos\ln ax$ відповідно. Після двократного інтегрування частинами одержуємо рівняння відносно шуканого інтеграла.	$\int \cos\ln 2x\,dx = \left\lvert \begin{matrix} u = \cos\ln 2x \\ dv = dx \end{matrix} \right\rvert.$
Приклади	

ПРИКЛАД 1. Обчислити інтеграл $\int (x+1)\,e^{2x}dx$.

Розв'язання: Інтеграл відноситься до 1 типу інтегрування частинами, тому

$$\int (x+1)e^{2x}dx = \left\lvert \begin{matrix} u = x+1 & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right\rvert =$$

$$= (x+1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити інтеграл $\int x^2 \cos x dx$.

Розв'язання: Інтеграл відноситься до 1 типу інтегрування частинами, тому

$$\int x^2\cos xdx = \left\lvert \begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos xdx & v = \int \cos xdx = \sin x \end{matrix} \right\rvert =$$

$$= x^2\cdot\sin x - \int \sin x\cdot 2xdx = x^2\cdot\sin x - 2\int x\sin xdx =$$

$$= \left\lvert \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin xdx & v = \int \sin xdx = -\cos x \end{matrix} \right\rvert =$$

$$= x^2 \cdot \sin x - 2\left(x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)dx\right) = x^2 \cdot \sin x -$$

$$-2\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right) = x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \sin x\right) + C =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C .$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити інтеграл $\int (x+3)\,4^{2x}dx$.

Розв'язання: Інтеграл відноситься до 1 типу інтегрування частинами, тому

$$\int (x+3)\,4^{2x}dx = \left| \begin{array}{ll} u = x+3 & du = dx \\ dv = 4^{2x}dx & v = \int 4^{2x}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{4^{2x}}{\ln 4} \end{array} \right| =$$

$$= (x+3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4^{2x}}{\ln 4} - \int \frac{1}{2}\cdot\frac{4^{2x}}{\ln 4}dx = \frac{4^{2x}(x+3)}{2\ln 4} - \frac{1}{2\ln 4}\cdot\int 4^{2x}dx =$$

$$= \frac{4^{2x}(x+3)}{2\ln 4} - \frac{1}{2\ln 4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4^{2x}}{\ln 4} + C = \frac{4^{2x}(x+3)}{2\ln 4} - \frac{4^{2x}}{4\ln^2 4} + C .$$

ПРИКЛАД 4. Обчислити інтеграл $\int x\sin(3x-2)dx$.

Розв'язання: Інтеграл відноситься до 1 типу інтегрування частинами, тому

$$\int x\sin(3x-2)dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin(3x-2)dx & \\ v = \int \sin(3x-2)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x-2) & \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos(3x-2)\right) - \int\left(-\frac{1}{3}\cos(3x-2)\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos(3x-2) + \frac{1}{3}\int \cos(3x-2)dx = -\frac{1}{3}x\cos(3x-2) +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin(3x-2)+C=-\frac{1}{3}x\cos(3x-2)+\frac{1}{9}\sin(3x-2)+C.$$

ПРИКЛАД 5. Обчислити інтеграл $\int\frac{x\sin xdx}{\cos^3 2x}$.

Розв'язання: Покладемо $u=x$, $dv=\frac{\sin xdx}{\cos^3 x}$. Тоді $du=dx$,

$$v=\int\frac{\sin xdx}{\cos^3 x}=\left|\begin{matrix}t=\cos x\\ dt=-\sin xdx\\ -dt=\sin xdx\end{matrix}\right|=-\int\frac{dt}{t^3}=-\int t^{-3}dt=$$

$$=-\frac{t^{-2}}{-2}=\frac{1}{2t^2}=\frac{1}{2\cos^2 x}.$$

А тому,

$$\int\frac{x\sin xdx}{\cos^3 x}=\frac{x}{2\cos^2 x}-\int\frac{dx}{2\cos^2 x}=\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\mathrm{tg}x+C.$$

ПРИКЛАД 6. Обчислити інтеграл $\int\ln xdx$.

Розв'язання: Інтеграл відноситься до 2 типу інтегрування частинами, тому

$$\int\ln xdx=\left|\begin{matrix}u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx & v=\int dx=x\end{matrix}\right|=\ln x\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

ПРИКЛАД 7. Обчислити інтеграл $\int \arcsin x dx$.

Розв'язання: Інтеграл відноситься до 2 типу інтегрування частинами, тому

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{matrix} \right| = \arcsin x \cdot x -$$

$$-\int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} t = 1-x^2 \quad dt = -2xdx \\ dt/(-2) = xdx \end{matrix} \right| = x \arcsin x -$$

$$-\int \frac{dt/(-2)}{\sqrt{t}} == x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C =$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

ПРИКЛАД 8. Обчислити інтеграл $\int \mathrm{arctg} 2x dx$.

Розв'язання: Інтеграл відноситься до 2 типу інтегрування частинами, тому

$$\int \mathrm{arctg} 2x dx = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{arctg} 2x & du = \dfrac{2dx}{1+4x^2} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{matrix} \right| = \mathrm{arctg} 2x \cdot x -$$

$$-\int x \cdot \frac{2dx}{1+4x^2} = \left| \begin{matrix} t = 1+4x^2 \\ dt = 8xdx \\ dt/4 = 2xdx \end{matrix} \right| = x\, \mathrm{arctg} 2x - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= x\, \mathrm{arctg} 2x - \frac{1}{4}\ln|t| + C = x\, \mathrm{arctg} 2x - \frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right| + C.$$

ПРИКЛАД 9. Обчислити інтеграл $\int \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання: Покладемо $u=\arcsin x$, $dv=\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Тоді $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{vmatrix} t=1-x^2 & dt=-2xdx \\ & dt/(-2)=xdx \end{vmatrix}=$

$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}=-\sqrt{1-x^2}$. А тому,

$$\int\frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\cdot\left(-\sqrt{1-x^2}\right)-\int\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int dx=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C.$$

ПРИКЛАД 10. Обчислити інтеграл $\int e^{2x+1}\sin x dx$.

Розв'язання: Інтеграл відноситься до 3 типу інтегрування частинами, тому

$$\int e^{2x+1}\sin x dx=\begin{vmatrix} u=e^{2x+1} & du=2e^{2x+1}dx \\ dv=\sin x dx & v=\int\sin x dx=-\cos x \end{vmatrix}=$$

$$=e^{2x+1}\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot 2e^{2x+1}dx=-e^{2x+1}\cos x+$$

$$+2\int e^{2x+1}\cos x dx=\begin{vmatrix} u=e^{2x+1} & du=2e^{2x+1}dx \\ dv=\cos x dx & v=\int\cos x dx=\sin x \end{vmatrix}=$$

$$=-e^{2x+1}\cos x+2\left(e^{2x+1}\sin x-\int\sin x\cdot 2e^{2x+1}dx\right)=$$

$$=-e^{2x+1}\cos x+2e^{2x+1}\sin x-4\int e^{2x+1}\sin x dx.$$

Далі прирівнюємо початковий вираз до останнього отриманого. Отримаємо рівняння, в якому невідомим є шуканий інтеграл.

$$\int e^{2x+1}\sin x dx = -e^{2x+1}\cos x + 2e^{2x+1}\sin x - 4\int e^{2x+1}\sin x dx .$$

$$5\int e^{2x+1}\sin x dx = -e^{2x+1}\cos x + 2e^{2x+1}\sin x .$$

$$\int e^{2x+1}\sin x dx = -\frac{1}{5}e^{2x+1}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x+1}\sin x + C .$$

1.1.4 Інтегрування раціональних дробів

Теорія
Нехай треба обчислити інтеграл від раціонального дробу: $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \frac{A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n}{B_0x^m + B_1x^{m-1} + ... + B_m}dx .$
Якщо дріб неправильний (степінь чисельника більше або дорівнює степені знаменника), то його необхідно представити у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу. Для цього необхідно розділити чисельник на знаменник.
ПРИКЛАД. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}dx .$ *<u>Розв'язання</u>:* Дріб $\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$ – неправильний (степінь чисельника 4 більше степені знаменника 2).

Виділимо цілу частину.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{\ } x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x-3 & x^2+2x+1 \\
\underline{x^4+2x^3+x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2-2x+3} \\
\underline{\ } -2x^3-x^2+0\cdot x-3 & \\
\underline{-2x^3-4x^2-2x\quad} & \\
\underline{\ } 3x^2+2x-3 & \\
\underline{3x^2+6x+3} & \\
-4x-6 &
\end{array}
$$

Тому неправильний дріб можна представити у вигляді $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3+\dfrac{-4x-6}{x^2+2x+1}$.

Тобто,

$$\int\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}dx=\int x^2dx-2\int xdx+3\int dx+\int\frac{-4x-6}{x^2+2x+1}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+3x-2\int\frac{(2x+2)+1}{x^2+2x+1}dx=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+3x-$$

$$-2\int\frac{(2x+2)}{x^2+2x+1}dx-2\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\left|\begin{matrix}t=x^2+2x+1\\ dt=(2x+2)dx\end{matrix}\right|=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+3x-$$

$$-2\int\frac{dt}{t}-2\left(-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x^3}{3}-x^2+3x-2\ln|t|+\frac{2}{x+1}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}-x^2+3x-2\ln|x^2+2x+1|+\frac{2}{x+1}+C.$$

Якщо дріб правильний (степінь чисельника менше степені знаменника), то його необхідно розкласти на суму найпростіших дробів. Тип найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$. Тут можливі такі випадки:

а) Корені знаменника дійсні й різні, тобто

$$Q_m(x)=(x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c).$$

У цьому разі правильний дріб розкладається на найпростіші дробі:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}+\ldots+\frac{D}{(x-c)}.$$

б) Корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні:

$$Q_m(x)=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\ldots(x-c)^{\gamma}.$$

У цьому разі правильний дріб розкладається на найпростіші дробі:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{B}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots\frac{C}{(x-a)}+\frac{D}{(x-b)^{\beta}}+$$

$$+\frac{E}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{F}{(x-b)}+\frac{G}{(x-c)^{\gamma}}+\frac{H}{(x-c)^{\gamma-1}}+\ldots+\frac{G}{(x-c)}.$$

в) Серед коренів знаменника є комплексно-спряжені:

$$Q(x)=(x^2+px+q)\ldots(x^2+kx+b).$$

У цьому разі правильний дріб розкладається на

найпростіші дробі:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{Cx+D}{x^2+kx+b}.$$

ПРИКЛАД 1. Обчислити інтеграл

$$\int\frac{4x^2-13x+7}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx.$$

Розв'язання: Знайдемо корені знаменника і розкладемо знаменник на множники:

$$(x^2-5x+6)(x+1)=0,$$

$$x^2-5x+6=0 \text{ або } x+1=0$$

$$D=1$$

$$x_1=2,\ x_2=3 \qquad x_3=-1$$

Отже, $(x^2-5x+6)(x+1)=(x-2)(x-3)(x+1)$.

Отримали випадок, коли всі корені дійсні й різні, тому

$$\frac{4x^2-13x+7}{(x^2-5x+6)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x-3)(x+1)+B(x-2)(x+1)+C(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+1)}.$$

Прирівнюємо чисельники:

$$4x^2-13x+7=A(x-3)(x+1)+B(x-2)(x+1)+$$
$$+C(x-2)(x-3)$$

Знайдемо A, B, та C:

$$\begin{array}{l|l} x=2 & -3A=-3 \quad A=1 \\ x=3 & \ 4B=4 \ \ ,\ \ B=1\ , \\ x=-1 & 12C=24 \quad C=2 \end{array}$$

$$\int\frac{4x^2-13x+7}{(x-2)(x-3)(x+1)}dx=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x-3}+\int\frac{2dx}{x+1}=$$
$$=\ln|x-2|+\ln|x-3|+2\ln|x+1|+C.$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити інтеграл . $\int\frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x+2)^3(x-1)}dx$.

Розв'язання: Знайдемо корені знаменника:

$$(x+2)^3(x-1)=0,$$

$$(x+2)^3=0 \text{ або } x-1=0,$$

$$x_{1,2,3}=-2,\ x_4=1.$$

Отримали випадок, коли всі корені дійсні, є кратні, тому

$$\frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x+2)^3(x-1)}=\frac{A}{(x+2)^3}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-1}=$$

$$=\frac{A(x-1)+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2(x-1)+D(x+2)^3}{(x+2)^3(x-1)}.$$

Прирівнюємо чисельники:

$$x^3+4x^2+5x+8=A(x-1)+B(x+2)(x-1)+$$

$$+C(x+2)^2(x-1)+D(x+2)^3$$

Знайдемо A, B, C та D:

$$\begin{array}{l|c} x=-2 & -3A=6 \\ x=1 & 27D=18 \\ x=0 & -A-2B-4C+8D=8 \\ x=-1 & -2A-2B-2C+D=6 \end{array},$$

$$\begin{cases} A=-2 \\ D=18/27=2/3 \\ -(-2)-2B-4C+8\cdot(2/3)=8 \\ -2\cdot(-2)-2B-2C+(2/3)=6 \end{cases}, \begin{cases} A=-2 \\ D=2/3 \\ -2B-4C=2/3 \\ -2B-2C=4/3 \end{cases},$$

Віднімемо від четвертого третє рівняння:

$$\begin{cases} A=-2 \\ D=2/3 \\ C=1/3 \\ -2B-4\cdot(1/3)=2/3 \end{cases}, \begin{cases} A=-2 \\ D=2/3 \\ C=1/3 \\ -2B=2 \end{cases}, \begin{cases} A=-2 \\ D=2/3 \\ C=1/3 \\ B=-1 \end{cases}.$$

$$\int \frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x+2)^3(x-1)}dx = \int \frac{-2dx}{(x+2)^3} + \int \frac{-1dx}{(x+2)^2} + \int \frac{(1/3)dx}{x+2} +$$

$$+\int \frac{(2/3)dx}{x-1} = -2\int (x+2)^{-3}dx - \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -2\frac{(x+2)^{-2}}{-2} - \left(-\frac{1}{x+2}\right) + \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + C =$$

$$= \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + C.$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити інтеграл . $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

<u>*Розв’язання*</u>: Знайдемо корені знаменника:

$$(x+1)(x^2+1)=0,$$

$$x+1=0 \text{ або } x^2+1=0,$$

$$x=-1 \text{ або } x^2=-1 \text{ (дійсних коренів не має).}$$

Отримали випадок, коли серед коренів знаменника є комплексно-спряжені, тому

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Прирівнюємо чисельники:

$$1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1),$$

$$Ax^2+A+Bx^2+Bx+Cx+C=1,$$

$$(A+B)x^2+(B+C)x+A+C=1.$$

Знайдемо A, B, C та D, прирівнявши коефіцієнти перед однаковими степенями змінної:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0 \\ x & B+C=0, \\ x^0 & A+C=1 \end{array} \quad \begin{cases} A=-B \\ B+C=0 \\ -B+C=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} A=-B \\ B=-C, \\ 2C=1 \end{cases} \begin{cases} A=1/2 \\ B=-1/2. \\ C=1/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \int \frac{1/2}{x+1}dx + \int \frac{(-1/2)x+(1/2)}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ dt/2 = xdx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{dt/2}{t} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|t| +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C\ .$$

1.1.5 Інтегрування тригонометричних функцій

	Формули
1а.	$\int \sin ax \cos bx\ dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)dx =$
1б	$\int \cos ax \cos bx\ dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right)dx =$
1в	$\int \sin ax \sin bx\ dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)dx =$
2а	$\int \sin^{2p+1} ax \cos^m ax\ dx = \int \sin^{2p} ax \cos^m ax \sin ax\ dx =$ $= \left| \begin{array}{l} u = \cos ax;\ \ du = -a\sin ax\ dx; \\ \sin^2 ax = 1-u^2 \end{array} \right| =$
2б	$\int \cos^{2p+1} ax \sin^m ax\ dx = \int \cos^{2p} ax \sin^m ax \cos ax\ dx =$ $= \left| \begin{array}{l} u = \sin ax;\ \ du = a\cos ax\ dx; \\ \cos^2 ax = 1-u^2 \end{array} \right| =$

2в	$$\int \sin^{2p} ax \cos^{2q} ax \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin^2 ax = \dfrac{1-\cos 2ax}{2}; \\ \cos^2 ax = \dfrac{1+\cos 2ax}{2}; \\ \sin ax \cdot \cos ax = \dfrac{\sin 2ax}{2} \end{array} \right| =$$
2г	$$\int \frac{\sin^{2p} ax}{\cos^{2q} ax} dx, \quad \int \frac{\cos^{2p} ax}{\sin^{2q} ax} dx,$$ $$\int \frac{dx}{\sin^{2p} ax \cos^{2q} ax}, \quad \int \frac{dx}{\sin^{2p+1} ax \cos^{2q+1} ax}$$ Заміна $\left| \begin{array}{l} u = tg\, ax; \; x = \dfrac{1}{a} arctg\, u; \; dx = \dfrac{1}{a}\dfrac{du}{1+u^2}; \\ \sin ax = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}; \; \cos ax = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{array} \right|$
3.	$$\int \mathrm{tg}^m ax \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \mathrm{tg} ax; \;\; x = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} u; \\ dx = \dfrac{1}{a}\dfrac{du}{1+u^2} \end{array} \right| =$$ $$\int \mathrm{ctg}^m ax \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \mathrm{ctg} ax; \;\; x = \dfrac{1}{a} \mathrm{arcctg} u; \\ dx = -\dfrac{1}{a}\dfrac{du}{1+u^2} \end{array} \right| =$$

4.	$$\int R(\sin ax,\ \cos ax)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = tg\,\dfrac{ax}{2};\ x = \dfrac{2}{a}\,arctg\,u; \\ dx = \dfrac{2}{a}\dfrac{du}{1+u^2}; \\ \sin ax = \dfrac{2u}{1+u^2};\ \cos ax = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \end{array} \right| =$$
5.	$$\int R\left(\sin^2 ax, \cos^2 ax, \sin ax\cdot\cos ax\right)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = tg\,ax;\ x = \dfrac{1}{a}\,arctg\,u; \\ dx = \dfrac{1}{a}\dfrac{du}{1+u^2}; \\ \sin ax = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}; \\ \cos ax = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{array} \right| =$$
	ПРИКЛАД 1. Обчислити інтеграл $$\int \sin 5x\cdot\sin 7x\,dx.$$ <u>*Розв'язання*</u>*:* Використаємо формулу 1в, потім розіб'ємо інтеграл на два, кожен з яких табличний і використаємо парність косинуса $\cos(-x)=\cos x$: $$\int \sin 5x\cdot\sin 7x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos(5-7)x - \cos(5+7)x)\,dx =$$ $$= \frac{1}{2}\int (\cos(-2)x - \cos 12x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x dx =$$ $$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\sin 12x + C = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити інтеграл $\int \sin^2 \frac{3x}{2}\, dx$.

Розв'язання: Використаємо випадок 2в:

$$\int \sin^2 \frac{3x}{2}\, dx = \left| \sin^2 \frac{3x}{2} = \frac{1-\cos 3x}{2} \right| = \int \frac{1-\cos 3x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\sin 3x + C.$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити інтеграл $\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 2x\, dx$.

Розв'язання: Використаємо випадок 2в:

$$\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 2x\, dx = \left| \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{\sin 4x}{2} \right| = \int \left(\frac{\sin 4x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 4x}{4} dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 4x\, dx = \left| \sin^2 4x = \frac{1-\cos 8x}{2} \right| =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 8x}{2} dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 8x\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\sin 8x + C =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}\sin 8x + C.$$

ПРИКЛАД 4. Обчислити інтеграл . $\int \sin^3 2x \cdot \cos^8 2x\, dx$.

Розв'язання: У синуса степінь непарна, тому використаємо випадок 2а:

$$\int \sin^3 2x \cdot \cos^8 2x\, dx = \int \sin^2 2x \cos^8 2x \sin 2x\, dx =$$

$$=\begin{vmatrix} u=\cos 2x;\ \ du=-2\sin 2x\ dx; \\ \sin^2 2x = 1-u^2 \end{vmatrix} = \int (1-u^2)\cdot u^8 \frac{du}{-2} =$$

$$=-\frac{1}{2}\int (1-u^2)\cdot u^8 du = -\frac{1}{2}\int (u^8-u^{10})du = -\frac{1}{2}\int u^8 du + \frac{1}{2}\int u^{10}du =$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{u^9}{9}+\frac{1}{2}\frac{u^{11}}{11}+C = -\frac{\cos^9 2x}{18}+\frac{\cos^{11} 2x}{22}+C.$$

ПРИКЛАД 5. Обчислити інтеграл . $\int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt{\sin 3x}}dx$.

<u>*Розв'язання*</u>*:* У косинуса степінь непарна, тому використаємо випадок 2б:

$$\int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt{\sin 3x}}dx = \int \frac{\cos^2 3x\cdot \cos 3x}{\sqrt{\sin 3x}}dx =$$

$$=\int \frac{\cos^2 3x\cdot \cos 3x}{\sqrt{\sin 3x}}dx = \begin{vmatrix} u=\sin 3x;\ \ du = 3\cos 3x\ dx; \\ \cos^2 3x = 1-u^2 \end{vmatrix} =$$

$$=\int \frac{(1-u^2)\cdot(du/3)}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - \frac{1}{3}\int \frac{u^2du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{u} - \frac{1}{3}\int u^{3/2}du =$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{u}-\frac{1}{3}\frac{u^{5/2}}{5/2}+C = \frac{2}{3}\sqrt{\sin 3x}-\frac{2}{15}\sqrt{\sin^5 3x}+C.$$

ПРИКЛАД 6. Обчислити інтеграл . $\int \frac{dx}{\sin^2 3x\cdot \cos^4 3x}$.

<u>*Розв'язання*</u>*:* Використаємо випадок 2г:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 3x\cdot\cos^4 3x} = \begin{vmatrix} u = tg\, 3x;\ x=\frac{1}{3}arctg\, u;\ dx = \frac{1}{3}\frac{du}{1+u^2}; \\ \sin 3x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}};\ \cos 3x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{vmatrix} =$$

$$=\int\frac{\frac{1}{3}\frac{du}{1+u^2}}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4}=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{u^2}{1+u^2}\cdot\frac{1}{(1+u^2)^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{(1+u^2)(1+u^2)^2}{u^2(1+u^2)}du=\frac{1}{3}\int\frac{(1+u^2)^2}{u^2}du=\frac{1}{3}\int\frac{1+2u^2+u^4}{u^2}du=$$

$$\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{2u^2}{u^2}+\frac{u^4}{u^2}\right)du=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2}+\frac{2}{3}\int du+\frac{1}{3}\int u^2du=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{u}\right)+\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}\frac{u^3}{3}+C=-\frac{1}{3\mathrm{tg}3x}+\frac{2}{3}\mathrm{tg}3x+\frac{\mathrm{tg}^3 3x}{9}+C.$$

ПРИКЛАД 7. Обчислити інтеграл . $\int tg^3xdx$.

Розв’язання: Використаємо випадок 3:

$$\int tg^3xdx=\left|\begin{array}{l}u=\mathrm{tg}x;\ \ x=\mathrm{arctg}u;\\ dx=\dfrac{du}{1+u^2}\end{array}\right|=\int u^3\frac{du}{1+u^2}=\int\frac{u^3du}{1+u^2}=$$

Дріб $\frac{u^3}{1+u^2}$ – неправильний (степінь чисельника 3 більше степені знаменника 2). Виділимо цілу частину.

$$\begin{array}{r|l} -u^3 & u^2+1 \\ \underline{u^3+u} & \overline{u} \\ -u & \end{array}$$

$$=\int\left(u+\frac{-u}{u^2+1}\right)du=\int udu-\int\frac{udu}{u^2+1}=\left|\begin{array}{l}t=u^2+1\\ dt=2udu\end{array}\right|=\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right|+C=\frac{tg^2x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|tg^2x+1\right|+C$$

ПРИКЛАД 8. Обчислити інтеграл . $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$.

Розв'язання: Використаємо випадок 4:

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}=\left|\begin{array}{l} u=tg\,\frac{x}{2};\ x=2arctg\,u; \\ dx=\frac{2du}{1+u^2}; \\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2};\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2} \end{array}\right|=$$

$$=\int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3+2\frac{1-u^2}{1+u^2}-\frac{2u}{1+u^2}}=\int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{3(1+u^2)+2(1-u^2)-2u}{1+u^2}}=$$

$$=\int \frac{2du}{3+3u^2+2-2u^2-2u}=2\int \frac{du}{u^2-2u+5}=2\int \frac{du}{(u^2-2u+1)+4}=$$

$$=2\int \frac{du}{(u-1)^2+2^2}=2\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u-1}{2}+C=\mathrm{arctg}\,\frac{tg\,\frac{x}{2}-1}{2}+C\,.$$

ПРИКЛАД 9. Обчислити інтеграл . $\int \frac{dx}{4\sin^2 2x-5\cos^2 2x}$.

Розв'язання: Використаємо випадок 5:

$$\int \frac{dx}{4\sin^2 2x-5\cos^2 2x}=\left|\begin{array}{l} u=tg\,2x;\ x=\frac{1}{2}arctg\,u;\ dx=\frac{1}{2}\frac{du}{1+u^2}; \\ \sin 2x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}};\ \cos 2x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{array}\right|=$$

$$=\int \frac{\frac{1}{2}\frac{du}{1+u^2}}{4\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{4u^2}{1+u^2}-\frac{5}{1+u^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{4u^2-5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2-(\sqrt{5/4})^2}=\frac{1}{8}\frac{1}{2\sqrt{5/4}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{5/4}}{u+\sqrt{5/4}}\right|+C=$$

$$=\frac{2}{16\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}2x-(\sqrt{5}/2)}{\mathrm{tg}2x+(\sqrt{5}/2)}\right|+C=\frac{1}{8\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\mathrm{tg}2x-\sqrt{5}}{2\mathrm{tg}2x+\sqrt{5}}\right|+C.$$

1.1.6 Інтегрування ірраціональних функцій

1.1.6.1 Інтегрування лінійних ірраціональностей

1.	$\int R\left(x, x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, ..., x^{\alpha_k}\right)dx=\left\|\begin{array}{l} x=u^n; \\ dx=n\,u^{n-1}du; \\ u=x^{1/n}\end{array}\right\|$, де n – найменший спільний знаменник дробів $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$
2.	$\int R\left(x,(ax+b)^{\alpha_1}, (ax+b)^{\alpha_2}, \ldots, (ax+b)^{\alpha_k}\right)dx=$ $=\left\|\begin{array}{l} ax+b=u^n\ ;\ x=\frac{1}{a}\left(u^n-b\right) \\ dx=\frac{n}{a}\,u^{n-1}\,du\ ;\ u=\left(ax+b\right)^{1/n}\end{array}\right\|$, де n – найменший спільний знаменник дробів $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$
3.	$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_k}\right)dx=$

	$= \left\| \begin{array}{c} \dfrac{ax+b}{cx+d} = u^n \ ; \qquad x = \dfrac{b-du^n}{cu^n - a} \\ dx = \left(\dfrac{b-du^n}{cu^n - a} \right)' du \end{array} \right\|,$ де n – найменший спільний знаменник дробів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$
4.	$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$ Підстановки Ейлера: а) якщо ax^2+bx+c має дійсні корені x_1, x_2, тобто $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, тоді можна використати одну з наступних підстановок: $\sqrt{ax^2+bx+c} = u(x-x_1)$ або $\sqrt{ax^2+bx+c} = u(x-x_2)$; б) якщо ax^2+bx+c не має дійсних коренів і $a>0$, тоді використовують підстановку $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + u.$$ Звідси $ax^2+bx+c = u^2 \pm 2ux\sqrt{a} + ax^2$, тобто $x = \dfrac{u^2-c}{b \mp 2u\sqrt{a}}$, а тому, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + u = \pm \dfrac{u^2-c}{b \mp 2u\sqrt{a}}\sqrt{a} + u$. в) якщо ax^2+bx+c не має дійсних коренів і $a<0$ $c>0$, тоді використовують підстановку $$\sqrt{ax^2+bx+c} = xu \pm \sqrt{c}.$$

5.	$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$ де a, b – дійсні числа; m, n, p – раціональні числа: а) якщо p – ціле число, то підстановка $x = u^k$, де k – найменший спільний знаменник дробів m і n; б) якщо $(m+1)/n$ – ціле число, то підстановка $a+bx^n = u^s$, де s – знаменник дробі p; в) якщо $(m+1)/n+p$ – ціле число, то підстановка $a+bx^n = x^n u^s$, де s – знаменник дробі p.

ПРИКЛАД 1. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$.

<u>*Розв'язання*</u>*:* Використаємо випадок 1:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} = \left| \begin{array}{l} x = u^2; \\ dx = 2u\,du; \\ u = x^{1/2} \end{array} \right| = \int \frac{2u\,du}{u(u^2+3)} = 2\int \frac{du}{u^2+3} =$$

$$= 2\int \frac{du}{u^2+(\sqrt{3})^2} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}} + C.$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити інтеграл . $\int \frac{\sqrt{x+2}\,dx}{x-3}$.

Розв’язання: Використаємо випадок 2:

$$\int \frac{\sqrt{x+2}\,dx}{x-3} = \left| \begin{array}{l} x+2=u^2\ ;\ x=u^2-2 \\ dx=2u\,du\ ;\ u=\left(x+2\right)^{1/2} \end{array} \right| = \int \frac{u\cdot 2u\,du}{u^2-2-3} = 2\int \frac{u^2}{u^2-5}du =$$

$$= 2\int \frac{(u^2-5)+5}{u^2-5}du = 2\int du + 10\int \frac{du}{u^2-(\sqrt{5})^2} =$$

$$= 2u + 10\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{5}}{u+\sqrt{5}}\right| + C = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}\right| + C$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{\left(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Розв’язання: Використаємо випадок 1. Знаменники степенів – 2 та 3, найменше спільне кратне – 6, тому:

$$\int \frac{\left(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \left| \begin{array}{l} x=u^6; \\ dx=6u^5du; \\ u=x^{1/6} \end{array} \right| = \int \frac{\left(u^6+\sqrt{u^6}+\sqrt[3]{(u^6)^2}\right)6u^5du}{u^6\left(1+\sqrt[3]{u^6}\right)} =$$

$$= 6\int \frac{\left(u^6+u^3+u^4\right)u^5du}{u^6\left(1+u^2\right)} = 6\int \frac{\left(u^6+u^3+u^4\right)du}{u\left(1+u^2\right)} =$$

$$= 6\int \frac{\left(u^5+u^3+u^2\right)du}{1+u^2} = 6\int \left(u^3+1-\frac{1}{u^2+1}\right)du =$$

$$= 6\left(\frac{u^4}{4}+u-\operatorname{arctg}u\right)+C = \frac{3\left(\sqrt[6]{x}\right)^4}{2} + 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C\ .$$

ПРИКЛАД 4. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}$.

Розв'язання: Використаємо випадок 3:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}} = \left| \begin{array}{c} \frac{x+2}{x-1} = u^4; \qquad x = \frac{2+u^4}{u^4-1} \\ dx = \frac{4u^3(u^4-1) - 4u^3(2+u^4)}{(u^4-1)^2} du = \\ = \frac{4u^7 - 4u^3 - 8u^3 - 4u^7}{(u^4-1)^2} du = \\ = \frac{-12u^3}{(u^4-1)^2} du \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{-12u^3}{(u^4-1)^2} du}{\left(\frac{2+u^4}{u^4-1} - 1\right)\left(\frac{2+u^4}{u^4-1} + 2\right) u} =$$

$$= -12\int \frac{\frac{u^3}{(u^4-1)^2} du}{u \cdot \frac{3}{u^4-1} \cdot \frac{3u^4}{u^4-1}} = -12\int \frac{\frac{u^3}{(u^4-1)^2} du}{\frac{9u^5}{(u^4-1)^2}} = -12\int \frac{u^3 du}{9u^5} =$$

$$= -\frac{4}{3}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = \frac{4}{3u} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C.$$

ПРИКЛАД 5. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Розв'язання: Використаємо випадок 4б (знак оберемо, наприклад, плюс), тому що x^2+x+1 дійсних коренів не має і $a=1>0$:

$$\sqrt{x^2+x+1}=x\sqrt{1}+u.$$

Звідси $x^2+x+1=u^2+2ux+x^2$,

тобто $x=\dfrac{u^2-1}{1-2u}$, а тому,

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+u=\frac{u^2-1}{1-2u}+u=\frac{u^2-1+u(1-2u)}{1-2u}=\frac{-u^2+u-1}{1-2u}.$$

Знайдемо dx:

$$dx=\left(\frac{u^2-1}{1-2u}\right)'du=\frac{2u(1-2u)-(u^2-1)(-2)}{(1-2u)^2}du=\frac{-2u^2+2u-2}{(1-2u)^2}du$$

Підставимо все знайдене в інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{\dfrac{-2u^2+2u-2}{(1-2u)^2}du}{\dfrac{u^2-1}{1-2u}+\dfrac{-u^2+u-1}{1-2u}}=\int\frac{\dfrac{-2u^2+2u-2}{(1-2u)^2}du}{\dfrac{u^2-1-u^2+u-1}{1-2u}}=$$

$$=\int\frac{(-2u^2+2u-2)(1-2u)}{(1-2u)^2(u-2)}du=\int\frac{(-2u^2+2u-2)}{(1-2u)(u-2)}du=$$

$$=\int\frac{-2u^2+2u-2}{-2u^2+5u-2}du=\int\frac{2u^2-2u+2}{2u^2-5u+2}du.$$

Під інтегралом отримали неправильний дріб, виділимо цілу частину, тоді

$$\int\frac{2u^2-2u+2}{2u^2-5u+2}du=\int\left(1+\frac{3u}{2u^2-5u+2}\right)du=\int du+\int\frac{3udu}{2u^2-5u+2}$$

$$=u+\frac{3}{2}\int\frac{udu}{u^2-\frac{5}{2}u+1}=u+\frac{3}{2}\int\frac{udu}{\left(u-\frac{1}{2}\right)(u-2)}=$$

$$\frac{u}{\left(u-\frac{1}{2}\right)(u-2)}=\frac{A}{u-\frac{1}{2}}+\frac{B}{u-2}=\frac{A(u-2)+B\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\left(u-\frac{1}{2}\right)(u-2)}$$

$$A(u-2)+B\left(u-\frac{1}{2}\right)=u$$

$$\begin{array}{l|lll} u=2 & (3/2)B=2 & & B=4/3 \\ u=1/2 & -(3/2)A=1/2 & & A=-1/3 \end{array}$$

$$=u+\frac{3}{2}\int\frac{udu}{u^2-\frac{5}{2}u+1}=u+\frac{3}{2}\int\left(\frac{-1/3}{u-1/2}+\frac{4/3}{u-2}\right)du=$$

$$=u-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u-1/2}+2\int\frac{du}{u-2}=u-\frac{1}{2}\ln\left|u-\frac{1}{2}\right|+2\ln|u-2|+C=$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}\right|+$$

$$+2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-2\right|+C\,.$$

ПРИКЛАД 6. Обчислити інтеграл $\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$.

<u>*Розв'язання*</u>:

$$\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx=\left|m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{3}\right|$$

Використаємо випадок 5б, тому що $(m+1)/n=2$ –

ціле число, тоді підстановка:

$$1+x^{\frac{1}{4}}=u^3,\quad x=(u^3-1)^4,\quad dx=4(u^3-1)^3\cdot 3u^2du\,.$$

Підставимо все в інтеграл:

$$\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{(u^3-1)^4}+1}}{\sqrt{(u^3-1)^4}}\cdot 4(u^3-1)^3\cdot 3u^2du=12\int\frac{\sqrt[3]{u^3-1+1}}{(u^3-1)^2}(u^3-1)^3u^2du=$$

$$=12\int u^3(u^3-1)du=12\int(u^6-u^3)du=12\left(\frac{u^7}{7}-\frac{u^4}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^4}+C\,.$$

ПРИКЛАД 7. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

<u>*Розв’язання*</u>:

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\left|m=-4,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2}\right|$$

Використаємо випадок 5в, тому що $(m+1)/n+p=-2$ – ціле число, тоді підстановка:

$$1+x^2=x^2u^2,\quad x^{-2}+1=u^2,\quad -2x^{-3}dx=2udu\,,\quad x^{-3}dx=-udu\,.$$

Підставимо все в інтеграл:

$$\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-4}\left(x^2(x^{-2}+1)\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-5}(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\int x^{-2}(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}x^{-3}dx=\int(u^2-1)(u^2)^{-\frac{1}{2}}(-u)du=-\int(u^2-1)du=$$

$$=-\frac{u^3}{3}+u+C=\left|\begin{matrix}x^{-2}+1=u^2\\ u=\sqrt{x^{-2}+1}\end{matrix}\right|=-\frac{\sqrt{(x^{-2}+1)^3}}{3}+\sqrt{x^{-2}+1}+C=$$

$$=\left|\begin{matrix}1+x^2=x^2u^2 \quad u^2=\dfrac{1+x^2}{x^2}\\ u=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\end{matrix}\right|=-\frac{\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3}{3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

1.1.6.2 Тригонометричні підстановки

1.	$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left\lvert\begin{matrix}x=a\sin u; \quad dx=a\cos u\,du;\\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos u\end{matrix}\right\rvert$
2.	$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left\lvert\begin{matrix}x=\dfrac{a}{\cos u}; dx=\dfrac{a\sin u\,du}{\cos^2 u};\\ \sqrt{x^2-a^2}=\dfrac{a\sin u}{\cos u}\end{matrix}\right\rvert$
3.	$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left\lvert\begin{matrix}x=a\,\mathrm{tg}u; \ dx=\dfrac{adu}{\cos^2 u};\\ \sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{a}{\cos u}\end{matrix}\right\rvert$

ПРИКЛАД 1. Обчислити інтеграл $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$.

Розв'язання: Використаємо випадок 1:

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=2\sin u; \quad dx=2\cos u\,du;\\ \sqrt{2^2-x^2}=2\cos u\end{matrix}\right|=\int\frac{2\cos u}{(2\sin u)^2}\cdot 2\cos u\,du=$$

$$=\int\frac{4\cos^2 u}{4\sin^2 u}du=\int\frac{1-\sin^2 u}{\sin^2 u}du=\int\frac{du}{\sin^2 u}-\int du=-\mathrm{ctg}u-u+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x=2\sin u \\ \sin u=x/2 \\ u=\arcsin(x/2) \end{array}\right|=-\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)-\arcsin\frac{x}{2}+C=$$

$$=\left|\mathrm{ctg}u=\frac{\cos u}{\sin u}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin u}=\frac{\sqrt{1-(x/2)^2}}{x/2}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right|=$$

$$=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$.

<u>Розв'язання</u>: Використаємо випадок 6в:

$$\int\frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}=\left|\begin{array}{c} x=3\mathrm{tg}u;\ \ dx=\dfrac{3du}{\cos^2 u}; \\ \sqrt{3^2+x^2}=\dfrac{3}{\cos u} \end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{3du}{\cos^2 u}}{\left(\dfrac{3}{\cos u}\right)^2\dfrac{3}{\cos u}}=$$

$$=\int\frac{\dfrac{3du}{\cos^2 u}}{\dfrac{9}{\cos^2 u}\cdot\dfrac{3}{\cos u}}=\frac{1}{9}\int\cos u\,du=\frac{1}{9}\sin u+C=\left|\begin{array}{l} x=3\mathrm{tg}u \\ \mathrm{tg}u=x/3 \\ u=arctg(x/3) \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{9}\sin(\mathrm{arctg}(x/3))+C=\left|\begin{array}{c} x=3\mathrm{tg}u;\ \ \mathrm{tg}u=x/3; 1+\mathrm{tg}^2u=\dfrac{1}{\cos^2 u} \\ \cos u=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x/3)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{9+x^2}} \\ \sin u=\mathrm{tg}u\cdot\cos u=\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}+C=\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}}+C.$$

ПРИКЛАД 3. Знайти інтеграл $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Розв'язання:

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx=\int(3\sin t)^2\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt=$$

$$=\int 9\sin^2 t\cdot 3|\cos t|\cdot 3\cos t\,dt=81\int\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=(81/4)\int\sin^2 2t\,dt=(81/8)\int(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=(81/8)\cdot\left(\int dt-\int\cos 4t\,dt\right)=(81/8)\cdot t-(81/8)\cdot\int\cos 4t\,dt$$

при умові $\cos t\ge 0$. Нехай $t=u/4$. Тоді $dt=(1/4)\,du$ і

$$\int\cos 4t\,dt=(1/4)\int\cos u\,du=(1/4)\sin u+C.$$

Отже

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx=(81/8)\cdot t-(81/8)\cdot(1/4)\sin u+C.$$

Повернемось до початкової змінної x:

$$t=\arcsin(x/3);\quad u=4t=4\arcsin(x/3).$$

Тоді

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx=\frac{81}{8}\arcsin(x/3)-\frac{81}{32}\sin(4\arcsin(x/3))+C.$$

Звичайно, отриманий результат можна спростити, використовуючи тригонометричні тотожності.

1.2 Визначений інтеграл

	Теорія
Поняття визначеного інтеграла	Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин точками ділення $a = x_0$, $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$, такими, що $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ і позначимо $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2, ..., x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$. У кожному з відрізків $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$, візьмемо точку, яку позначимо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Обчислимо значення функції $f(\xi_1)$, $f(\xi_2), ..., f(\xi_n)$ і складемо суму $$S_n(f) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$. Ця сума зветься ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ – її інтегральна сума на $[a;b]$. Позначимо через $\max \Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\max \Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n у розбитті прямує до нескінченності. ***Визначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому здрібненні

<table>
<tr>
<td>Поняття визначеного інтеграла</td>
<td>

розбиття відрізка $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ ,$$

де a і b – відповідно ***нижня*** і ***верхня межі інтегрування***; $[a;b]$ – ***відрізок інтегрування***.

<u>Геометричний зміст</u>. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід’ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *чисельно дорівнює площі* S *відповідної криволінійної трапеції*: $S = \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Фізичний зміст</u>. Нехай матеріальна точка рухається вздовж деякої кривої l з лінійною швидкістю $v = v(t)$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ *чисельно дорівнює пройденому шляху* S *за проміжок часу* $[\alpha;\beta]$: $S = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$.

</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Формула Ньютона-Лейбниця</td>
<td>

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

ПРИКЛАД 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx$.

<u>*Розв’язання:*</u> Використовуючи таблицю інтегралів та формулу Ньютона-Лейбниця, одержимо:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$$

</td>
</tr>
</table>

	ПРИКЛАД 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^2 xdx$. *Розв'язання:* Використовуючи таблицю інтегралів та формулу Ньютона-Лейбниця, одержимо: $\int\limits_1^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big\|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

1.2.1 Властивості визначеного інтегралу

№ п/п	Словесне формулювання	Аналітичний запис
1.	Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$
2.	Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
3.	Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
4.	Для будь-яких трьох чисел a, b і c справедлива рівність (якщо тільки всі ці інтеграли існують)	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx +$ $+\int_c^b f(x)\,dx$
5.	Сталий множник можна	$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$

	виносити за знак визначеного інтеграла	
6.	Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо	$\int_a^b (f(x)+g(x)-h(x))\,dx =$ $=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx-$ $-\int_a^b h(x)\,dx$

1.2.2 Заміна змінної у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x=\varphi(t), & dx=\varphi'(t)\,dt \\ \varphi(\alpha)=a, & \varphi(\beta)=b \end{matrix} \right| = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

ПРИКЛАД 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$.

<u>*Розв'язання*</u>:

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = \left| \begin{matrix} t=x^2 \quad dt=2xdx \quad dt/2=xdx \\ t_1=0^2=0 \quad t_2=(\sqrt{3})^2=3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_0^3 \frac{dt/2}{\sqrt{t^2+16}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|3+\sqrt{3^2+16}\right| - \ln\left|0+\sqrt{0^2+16}\right|\right) = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{8}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln 2^{1/2} = \ln\sqrt{2}.$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\cos^2 x+1}$.

Розв'язання:

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin xdx}{\cos^2 x+1}=\left|\begin{matrix} t=\cos x \quad dt=-\sin xdx \quad - \ dt=\sin xdx \\ t_1=\cos(\pi/2)=0 \quad t_2=\cos\pi=-1\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^{-1}\frac{-dt}{t^2+1}=\int_{-1}^{0}\frac{dt}{t^2+1}=\left(\operatorname{arctg}t\right)\Big|_{-1}^{0}=\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}(-1)=0+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити інтеграл $\int_1^2\frac{e^{1/x}dx}{x^2}$.

Розв'язання:

$$\int_1^2\frac{e^{1/x}dx}{x^2}=\left|\begin{matrix} t=1/x \quad dt=-(1/x^2)dx \quad - \ dt=(1/x^2)dx \\ t_1=1/1=1 \qquad t_2=1/2\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_1^{1/2}e^t(-\ dt)=-e^t\Big|_1^{1/2}=-\left(e^{1/2}-e\right)=e-\sqrt{e}.$$

ПРИКЛАД 4. Обчислити інтеграл $\int_1^e\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

Розв'язання: $\int_1^e\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}=\left|\begin{matrix} t=\ln x \quad dt=(1/x)dx \\ t_1=\ln 1=0 \quad t_2=\ln e=1\end{matrix}\right|=$

$$=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}t\Big|_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

ПРИКЛАД 5. Обчислити інтеграл $\int_2^7\frac{\sqrt[4]{3x-5}\,dx}{\sqrt{3x-5}+1}$.

Розв'язання:

$$\int_2^7\frac{\sqrt[4]{3x-5}\,dx}{\sqrt{3x-5}+1}=\left|\begin{matrix} 3x-5=u^4 \quad x=\dfrac{u^4+5}{3} \quad dx=\dfrac{4u^3}{3}du \\ u_1=\sqrt[4]{3\cdot 2-5}=1 \quad u_2=\sqrt[4]{3\cdot 7-5}=2\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_1^2 \frac{\sqrt[4]{u^4}\cdot\frac{4u^3}{3}du}{\sqrt{u^4}+1}=\frac{4}{3}\int_1^2 \frac{u^4du}{u^2+1}=\left|\begin{array}{l|l} -\,u^4 & u^2+1 \\ \quad\underline{u^4+u^2} & \overline{u^2-1} \\ \quad -\,-u^2 & \\ \qquad \underline{-u^2-1} & \\ \qquad\quad 1 & \end{array}\right|=$$

$$=\int_1^2\left(u^2-1+\frac{1}{u^2+1}\right)du=\left(\frac{u^3}{3}-u+\text{arctg}u\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{2^3}{3}-2+\text{arctg}2-\left(\frac{1^3}{3}-1+\text{arctg}1\right)=\frac{8}{3}-2+\text{arctg}2-\frac{1}{3}+1-\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{7}{3}-1+\text{arctg}2-\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}+\text{arctg}2-\frac{\pi}{4}.$$

ПРИКЛАД 6. Обчислити інтеграл $\int_0^{1/2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Розв'язання</u>:

$$\int_0^{1/2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{array}{l} x=\sin u \quad dx=\cos u du \\ \sqrt{1-x^2}=\cos u \\ u_1=\arcsin 0=0 \\ u_2=\arcsin(1/2)=\pi/6 \end{array}\right|=\int_0^{\pi/6}\frac{\sin^2 u\cdot\cos u du}{\cos u}=$$

$$=\int_0^{\pi/6}\sin^2 u du=\int_0^{\pi/6}\frac{1-\cos 2u}{2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(1-\cos 2u)du=$$

$$=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right)\Bigg|_0^{\pi/6}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\sin(2\cdot 0)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

1.2.3 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

ПРИКЛАД 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,dx$.

Розв'язання:

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx =$$

$$= \pi\cdot\sin\pi - 0\cdot\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -1-1 = -2 .$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Розв'язання:

$$\int\limits_1^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} & v = 2\sqrt{x} \end{vmatrix} = \ln x\cdot 2\sqrt{x}\Big|_1^{e} - \int\limits_1^{e} 2\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln e\cdot 2\sqrt{e} - \ln 1\cdot 2\sqrt{1} - 2\int\limits_1^{e} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{e} - 2\cdot 2\sqrt{x}\Big|_1^{e} =$$

$$= 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 = 4 - 2\sqrt{e} .$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\,dx$.

<u>Розв'язання</u>:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arccos 2x & du = -\dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= \arccos 2x \cdot x\Big|_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} x \cdot \left(-\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\arccos 1 + \frac{1}{2}\arccos(-1) + 2\int_{-1/2}^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = 1-4x^2 \quad dt = -8xdx \\ dt/(-8) = xdx \\ t_1 = 1-4(-1/2)^2 = 0 \\ t_2 = 1-4(1/2)^2 = 0 \end{matrix} \right| = 0 + \frac{\pi}{2} + 2\int_0^0 \frac{dt/(-8)}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{2}.$$

1.2.4 Невласні інтеграли

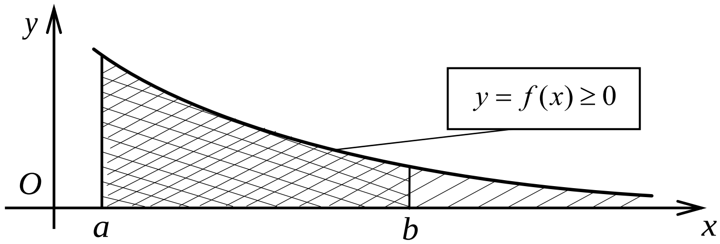
1.2.4.1 Невласні інтеграли по нескінченному проміжку (першого роду)

	Теорія
1.	***Невласний інтеграл з нескінченною верхньою межею.*** Нехай функція $f(x)$ визначена на вправо нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ й інтегрована на будь-якому відрізку $[a;b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді границю $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ називають ***невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею*** і

	позначають $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким чином, $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$ Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***інтегрованою*** на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***. Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***, а функція $f(x)$ – ***неінтегрованою*** на $[a;+\infty)$.
2.	***Невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею*** визначається аналогічно (на вліво нескінченному проміжку $(-\infty;b]$): $$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$
3.	***Невласний інтеграл з обома нескінченними межами*** визначається рівністю $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$ де c – довільне фіксоване дійсне число. *Інтеграл ліворуч у цій формулі існує (є збіжним) лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч*. Можна довести, що інтеграл, визначений цією рівністю, не залежить від вибору числа c.

Геометричний зміст

Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід’ємна на проміжку $[a;+\infty)$, а відповідний *невласний інтеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається. Тоді природно вважати, що він *визначає площу необмеженої області – трапеції з нескінченною основою*, що на рис. позначена похилими та перехресними штрихами. Починаючи з деякого значення b, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, яка позначена на рис. перехресними штрихами. Тобто, при $x \to +\infty$ функція $f(x)$ прямує до нуля настільки швидко, що площа відповідної нескінченної криволінійної трапеції виявляється скінченною.



ПРИКЛАД 1. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

<u>*Розв’язання:*</u> Даний невласний інтеграл з нескінченною верхньою межею, тому

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int\limits_{-\infty}^{\pi/2}\sin x\,dx$.

<u>Розв'язання</u>: Даний невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею, тому

$$\int\limits_{-\infty}^{\pi/2}\sin x\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{\pi/2}\sin x\,dx=\lim_{a\to-\infty}(-\cos x)\Big|_a^{\pi/2}=$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}(\cos(\pi/2)-\cos a)=\lim_{a\to-\infty}\cos a\,.$$

Але $\lim\limits_{a\to-\infty}\cos a$ не існує, тому заданий невласний інтеграл є розбіжним.

ПРИКЛАД 3. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^4+1}$.

<u>Розв'язання</u>: Даний невласний інтеграл з нескінченною верхньою межею, тому

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^4+1}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x\,dx}{x^4+1}=\begin{vmatrix} t=x^2 \quad dt=2xdx \quad dt/2=xdx \\ t_1=0^2=0 \qquad t_2=b^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b^2}\frac{dt/2}{t^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\Big|_0^{b^2}=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b^2-\operatorname{arctg}0)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}.$$

ПРИКЛАД 4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int\limits_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx$.

Розв'язання: Даний невласний інтеграл з обома нескінченними межами, тому

$$\int\limits_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,e^{x/4}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{x/4}dx & v = 4e^{x/4} \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(x\cdot 4e^{x/4}\Big|_a^0 - \int_a^0 4e^{x/4}dx \right) = \lim_{a\to-\infty}\left(0 - a\cdot 4e^{a/4} - 16e^{x/4}\Big|_a^0 \right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(-a\cdot 4e^{a/4} - 16 + 16e^{a/4} \right) = \infty\cdot e^{-\infty} - 16 + 16e^{-\infty} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{(-4a)'}{(e^{-a/4})'} \right) - 16 = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-4}{e^{-a/4}\cdot(-1/4)} \right) - 16 = 0 - 16 = -16.$$

ПРИКЛАД 5. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-x^2}dx$.

Розв'язання: Даний невласний інтеграл з обома нескінченними межами, тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}dx + \int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,e^{-x^2}dx +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\,e^{-x^2}dx = \begin{vmatrix} t = -x^2 \quad dt = -2xdx \quad dt/(-2) = xdx \\ t_1 = -a^2 \quad t_2 = 0 \quad t_3 = 0 \quad t_4 = -b^2 \end{vmatrix} =$$

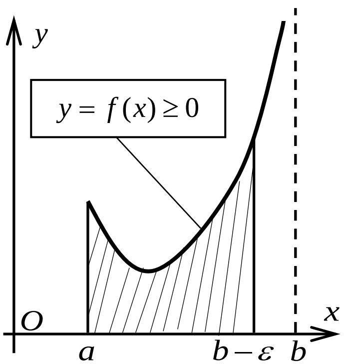
$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} e^t dt - \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^{-b^2} e^t dt = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty} e^t\Big|_{-a^2}^{0} - \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} e^t\Big|_0^{-b^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(e^0 - e^{-a^2}) - \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(e^{-b^2} - e^0) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{a^2}}\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{b^2}} - 1\right) = -\frac{1}{2}(1-0) - \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

1.2.4.2 Невласні інтеграли від необмежених функцій (другого роду)

<table>
<tr><td></td><td>Теорія</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нехай функція $f(x)$ неперервна на всьому відрізку $[a;b]$ за винятком скінченного числа точок, у яких функція необмежена. Точка $c\in[a;b]$ називається особливою точкою функції $f(x)$, якщо функція необмежена в ній, тобто $f(x)\to\infty$ при $x\to c$.
Зауваження. В особливій точці c функція $f(x)$ має вертикальну асимптоту $x=c$. Такою може бути внутрішня точка області визначення, в якій функція має розрив другого роду, або кінцева точка інтервалу області визначення.</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Нехай $x=b$ – єдина особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, тобто $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a;b)$ і $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$.
Тоді функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon>0$ такому, що $b-\varepsilon>a$. Невласним інтегралом від необмеженої функції називається границя
$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx .$$
Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають збіжним, а підінтегральну функцію $f(x)$ – інтегрованою на відрізку $[a;b]$. Сама границя приймається за значення цього інтеграла. Якщо ж ця границя нескінченна або взагалі не існує, то інтеграл</td></tr>
</table>

	називають ***розбіжним***.
2.	Якщо $x = a$ – єдина особлива точка, то невласний інтеграл визначається так: $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$
3.	Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь однієї внутрішньої точки $c\in(a;b)$, то за умови існування <u>обох</u> невласних інтегралів $\int_a^c f(x)\,dx$ і $\int_c^b f(x)\,dx$ за означенням покладають: $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$
4.	Якщо a та b – особливі точки, то за умови існування <u>обох</u> невласних інтегралів $\int_a^d f(x)\,dx$ і $\int_d^b f(x)\,dx$ за означенням покладають $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \quad ,$$ де d – довільна фіксована точка інтервалу $(a;b)$.
<u>Геометричний зміст</u>	 *Невласний інтеграл* $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$ якщо він збігається, у випадку невід'ємної функції $f(x)$ *визначає площу необмеженої області – відповідної трапеції з нескінченною*

	висотою. Починаючи з деякого значення $\varepsilon > 0$, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, що заштрихована на рис.

ПРИКЛАД 1. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}}$.

<u>*Розв'язання*</u>*:* Використаємо 1 випадок, адже $x=1$ – єдина особлива точка підінтегральної функції $\frac{1}{\sqrt[5]{x-1}}$, тому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-1/5}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{(x-1)^{4/5}}{4/5}\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \frac{5}{4}\lim_{\varepsilon\to+0}\left((1-\varepsilon-1)^{4/5}-(0-1)^{4/5}\right) =$$

$$= \frac{5}{4}(0-1) = -\frac{5}{4}.$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^4 x}$.

<u>*Розв'язання*</u>*:* Використаємо 2 випадок, адже $x=0$ – єдина особлива точка підінтегральної функції $\frac{1}{x\ln^4 x}$, тому

$$\int\limits_0^{1/e}\frac{dx}{x\ln^4 x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{1/e}\frac{dx}{x\ln^4 x} = \left|\begin{array}{c} t=\ln x \qquad dt = dx/x \\ t_1 = \ln\varepsilon \\ t_2 = \ln(1/e) = \ln e^{-1} = -1 \end{array}\right| =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\ln\varepsilon}^{-1}\frac{dt}{t^4}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\ln\varepsilon}^{-1}t^{-4}dt=\lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{t^{-3}}{-3}\right|_{\ln\varepsilon}^{-1}=-\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{1}{t^3}\right|_{\ln\varepsilon}^{-1}=$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-1-\frac{1}{\ln^3\varepsilon}\right)=-\frac{1}{3}\cdot(-1)=\frac{1}{3}.$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int\limits_0^9\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

Розв'язання: Використаємо 3 випадок, адже $x=1\in[0,9]$ – єдина особлива точка підінтегральної функції $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$, тому

$$\int\limits_0^9\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}+\int\limits_1^9\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{1+\delta}^{9}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-4/3}dx+\lim_{\delta\to+0}\int_{1+\delta}^{9}(x-1)^{-4/3}dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{(x-1)^{-1/3}}{-1/3}\right|_0^{1-\varepsilon}+\lim_{\delta\to+0}\left.\frac{(x-1)^{-1/3}}{-1/3}\right|_{1+\delta}^{9}=-3\lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}}\right|_0^{1-\varepsilon}-$$

$$-3\lim_{\delta\to+0}\left.\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}}\right|_{1+\delta}^{9}=-3\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(1-\varepsilon-1)}}-\frac{1}{\sqrt[3]{(0-1)}}\right)-$$

$$-3\lim_{\delta\to+0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(9-1)}}-\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\delta-1)}}\right)=-3\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{-\varepsilon}}-\frac{1}{\sqrt[3]{-1}}\right)-$$

$$-3\lim_{\delta\to+0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\delta}}\right)=-3(-\infty+1)-3(1/2-\infty)=\infty-3-3/2+\infty=\infty$$

Невласний інтеграл розбігається.

ПРИКЛАД 4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$.

Розв'язання: Використаємо 4 випадок, адже $x=0$ і $x=1$ – особливі точки підінтегральної функції $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$, тому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} + \int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} + \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{1/2}^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} t=\arcsin x & dt = dx/\sqrt{1-x^2} \\ t_1 = \arcsin\varepsilon & t_4 = \arcsin(1-\delta) \\ \multicolumn{2}{c}{t_2 = t_3 = \arcsin(1/2) = \pi/6} \end{array} \right| =$$

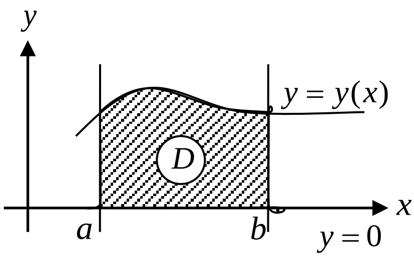
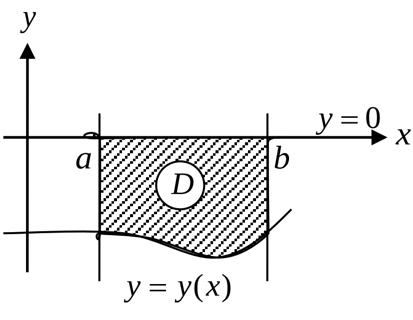
$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\arcsin\varepsilon}^{\pi/6} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\pi/6}^{\arcsin(1-\delta)} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{t}\Big|_{\arcsin\varepsilon}^{\pi/6} + \lim_{\delta\to+0} 2\sqrt{t}\Big|_{\pi/6}^{\arcsin(1-\delta)} =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{\pi/6} - \sqrt{\arcsin\varepsilon}\right) + 2\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{\arcsin(1-\delta)} - \sqrt{\pi/6}\right) =$$

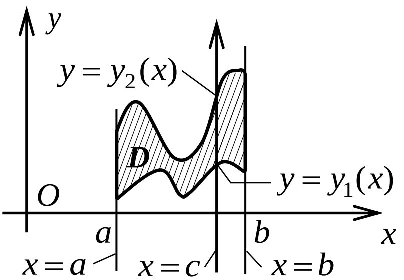
$$= 2\sqrt{\pi/6} + 2\sqrt{\pi/2} - 2\sqrt{\pi/6} = 2\sqrt{\pi/2} = \sqrt{2\pi}.$$

1.3 Застосування визначеного інтеграла

1.3.1 Площа плоскої фігури

	Рисунок	Формула
1.		криволінійна трапеція $D:\ y = y(x),\ \ y(x) \ge 0,$ $x = a,\ x = b,\ y = 0$ $S = \int_a^b y(x)\,dx$
2.		криволінійна трапеція $D:\ y = y(x),\ \ y(x) \le 0,$ $x = a,\ x = b,\ y = 0$ $S = -\int_a^b y(x)\,dx$

Під час розгляду питання про обчислення площі плоскої фігури основним є поняття правильної області.



Нехай D – деяка замкнена плоска область, відрізок $[a;b]$ - її проекція паралельно осі Oy на вісь Ox. Область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oy, якщо виконуються наступні умови: 1) вона обмежена знизу «горизонтальною» ***лінією входу*** $y = y_1(x)$, зверху – «горизонтальною» ***лінією виходу*** $y = y_2(x)$, а зліва і справа – вертикальними прямими відповідно $x = a$ і $x = b$ ($a < b$); 2) <u>довільна</u> пробна пряма $x = c$, що паралельна осі Oy, так само напрямлена і проходить через деяку <u>внутрішню</u> точку c відрізка $[a;b]$, перетинає межу цієї області лише в двох точках: в <u>одній</u> точці на ближній лінії входу та в <u>одній</u> точці на дальній лінії виходу; 2) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати <u>в явному вигляді одним рівнянням</u> $y = y_1(x)$ (аналогічно $y = y_2(x)$), розв'язаним <u>відносно</u> y.

Аналогічно визначається ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямку осі*** Ox плоска область D. При цьому змінні x і y міняються ролями.

Якщо область D – правильна в напрямку обох координатних осей Ox і Oy, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

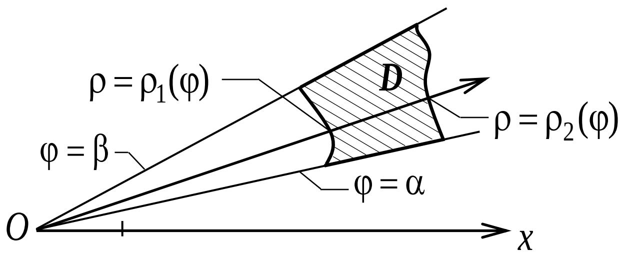
Якщо область D – неправильна, то прямими, що паралельні осям координат, її розбивають на правильні частини, що не мають спільних внутрішніх точок.

3.	Площу правильної в напрямку осі Oy області D можна обчислити за формулою: $$S=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\,dx.$$
4.	Площу правильної в напрямку осі Ox області D можна обчислити за формулою: $$S=\int_c^d (x_2(y)-x_1(y))\,dy.$$
5.	Якщо криволінійна трапеція обмежена лінією, що задана в параметричній формі у прямокутних координатах $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$, то площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою $$S=\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt.$$
6.	Якщо лінія, що обмежує фігуру, задана у полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$ $(\alpha\le\varphi\le\beta)$, тоді площа криволінійного сектора. обмеженого кривою $\rho=\rho(\varphi)$ і координатними променями $\varphi=\alpha$ та $\varphi=\beta$ обчислюється за формулою $$S=(1/2)\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi$$
7.	Нехай D – деяка замкнена плоска область, розміщена між крайніми координатними променями $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$, причому полюс O не лежить у ній. Область D називається ***правильною*** (***стан-***

дартною*) *в напрямку координатних променів $\varphi = C$ ($C = const$), якщо виконуються наступні умови:

1) довільний пробний координатний промінь $\varphi = C$, що лежить між крайніми променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, перетинає межу області D тільки в двох точках: в одній точці на ближній ***лінії входу*** $\rho = \rho_1(\varphi)$ і в одній точці на дальній ***лінії виходу*** $\rho = \rho_2(\varphi)$;

2) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна



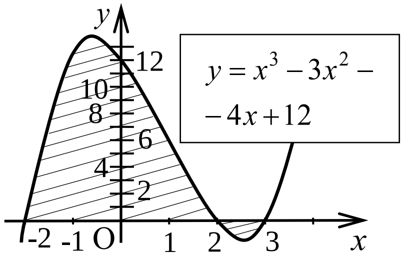
задати в явному вигляді одним рівнянням $\rho = \rho_1(\varphi)$ (аналогічно $\rho = \rho_2(\varphi)$), розв'язаним відносно ρ.

Тоді площу правильної в напрямку координатних променів області D можна обчислити за формулою

$$S = (1/2)\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)\right)d\varphi.$$

ПРИКЛАД 1. Обчислити площу S фігури, обмеженої лінією $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ і віссю Ox, коли $-2 \le x \le 3$.

<u>*Розв'язання*</u>:



Побудуємо (по точкам) графік заданої кривої. Очевидно, що $y(x) \ge 0$, коли $-2 \le x \le 2$ і $y(x) \le 0$, коли $2 \le x \le 3$.

Тобто використаємо випадки 1 і 2.

Тоді

$$S = \int_a^b |\, f(x)| dx = \int_{-2}^{2} (x^3 - 3x^2 - 4x + 12)\, dx -$$

$$-\int_2^3 (x^3 - 3x^2 - 4x + 12)\, dx = \left((1/4)x^4 - x^3 - 2x^2 + 12x\right)\Big|_{-2}^{2} -$$

$$-\left((1/4)x^4 - x^3 - 2x^2 + 12x\right)\Big|_{2}^{3} = 2^4/4 - 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 -$$

$$-\left((-2)^4/4 - (-2)^3 - 2(-2)^2 + 12(-2)\right) - (3^4/4 - 3^3 - 2 \cdot 3^2 +$$

$$+12 \cdot 3) + 2^4/4 - 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 4 - 8 - 8 + 24 - 4 - 8 + 8 +$$

$$+24 - 81/4 + 27 + 18 - 36 + 4 - 8 - 8 + 24 = 32{,}75 \text{ (кв. од.).}$$

ПРИКЛАД 2. Знайти площу області D, обмеженої лініями $x = 4 - \sqrt{y}$, $x - y + 2 = 0$ та $y = 1$. Задачу розв'язати двома способами:

а) використовуючи інтегрування по змінній x;

б) використовуючи інтегрування по змінній y.

Для кожного способу зробити відповідний рисунок.

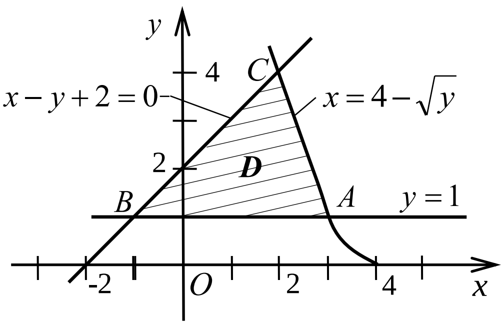
<u>*Розв'язання*</u>*:* Знайдемо характерні точки області D – її кутові точки, в яких перетинаються лінії, що утворюють межу області. Для цього складемо і розв'яжемо відповідні системи з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = 3; \; A(3;1); \; \begin{cases} x - y + 2 = 0; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = -1; \; B(-1;1);$$

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ x - y + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = (4-x)^2,\ x \le 4; \\ x - (4-x)^2 + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2; \\ x_2 = 7 > 4; \end{matrix}$$

$$y_1 = (4-2)^2 = 4; \quad C(2;4).$$

За цими точками побудуємо ескізи заданих ліній – двох прямих $x - y + 2 = 0$, $y = 1$ і лівої половини $x = 4 - \sqrt{y}$ вертикальної параболи. Одержимо попереднє зображення області D і проаналізуємо її форму.



а) Щоб скористатися формулою

$$S = \int_a^b (x_2(y) - x_1(y))\,dy,$$

необхідно подати область D як правильну в напрямку осі Oy. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то треба розбити її на правильні частини. З рисунку 1 видно, що область D – неправильна. Її можна розбити на дві правильні частини D_1 і D_2. Нехай площа першої фігури S_1, площа другої фігури S_2. Тоді шукана площа заданої області $S = S_1 + S_2$. Проведемо обчислення:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{2} ((x+2) - 1)\,dx + \int_2^3 \left((x-4)^2 - 1\right) dx =$$

$$=\int_{-1}^{2}(x+1)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-8x+15)dx=\left((1/2)x^2+x\right)\Big|_{-1}^{2}+$$

$$+\left((1/3)x^3-4x^2+15x\right)\Big|_{2}^{3}=2+2-1/2+1+9-36+45-$$

$$-8/3+16-30=35/6 \text{ (кв. од.).}$$

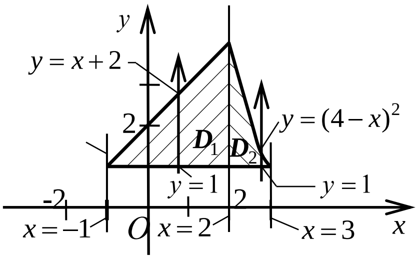


Рисунок 1

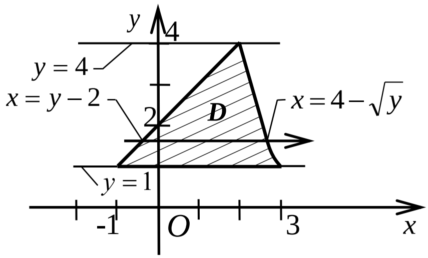


Рисунок 2

б) Щоб скористатися формулою

$$S=\int_{a}^{b}(y_2(x)-y_1(x))\,dx,$$

необхідно розглянути область D як правильну в напрямку осі Ox. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то треба розбити її на правильні частини. З рисунку 2 видно, що область D – правильна. Проведемо обчислення:

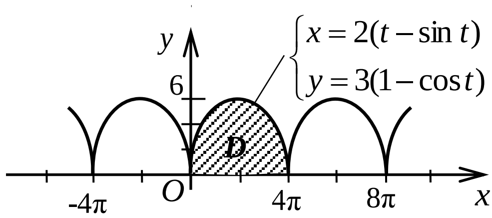
$$S=\int_{1}^{4}\left(\left(4-\sqrt{y}\right)-(y-2)\right)dy=\int_{1}^{4}\left(6-\sqrt{y}-y\right)dy=$$

$$=\left(6y-(2/3)\,y^{3/2}-(1/2)\,y^2\right)\Big|_{1}^{4}=24-16/3-8-6+2/3+$$

$$+1/2=35/6 \text{ (кв. од.).}$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити площу фігури D, обмеженої віссю Ox і першою аркою циклоїди $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t). \end{cases}$

Розв'язання: Фігура D площу якої необхідно знайти, виділена на рис. штриховкою. Першій арці циклоїди відповідають значення параметра $0 \le t \le 2\pi$. Проведемо обчислення:



$$x' = 2(t - \sin t)' = 2(1 - \cos t)\,; \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 3(1 - \cos t) \cdot 2(1 - \cos t)\, dt = 6\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt =$$

$$= 6t\,\Big|_0^{2\pi} - 12\sin t\,\Big|_0^{2\pi} + 3\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt = 12\pi - 0 - 12\sin 2\pi +$$

$$+ 12\sin 0 + 3t\,\Big|_0^{2\pi} + (3/2)\sin 2t\,\Big|_0^{2\pi} = 12\pi + 6\pi - 0 +$$

$$+ (3/2)\sin 4\pi - (3/2)\sin 0 = 18\pi \text{ (кв. од.).}$$

ПРИКЛАД 4. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\rho = 3/(4\cos\varphi)$ (пряма, що перпендикулярна до полярної осі Ox) та $\rho = \cos\varphi$ (коло).

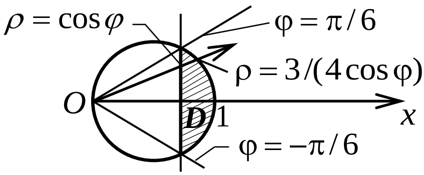
Розв'язання: Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують фігуру:

$$\begin{cases} \rho = 3/(4\cos\varphi); & 3/(4\cos\varphi) = \cos\varphi; \\ \rho = \cos\varphi; & \cos\varphi = \pm\sqrt{3}/2; \end{cases} \quad \cos\varphi = \pm\sqrt{3}/2\,;$$

$$\varphi_1 = -\pi/6; \;\; \varphi_2 = \pi/6.$$

З рисунка видно, що область D – правильна в напрямку координатних променів. Знайдемо її площу:

$$S=(1/2)\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\left(\cos^2\varphi-(3/(4\cos\varphi))^2\right)d\varphi=$$



$$=\frac{1}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi-$$

$$-\frac{9}{32}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\varphi+(1/2)\sin 2\varphi\right)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}-$$

$$-\frac{9}{32}tg\,\varphi\,\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}=(1/4)\left(\pi/6+(1/2)\sin(\pi/3)+\pi/6-\right.$$

$$\left.-(1/2)\sin(-\pi/3)\right)-(9/32)\left(tg(\pi/6)-tg(-\pi/6)\right)=$$

$$=(1/4)\cdot(\pi/3+\sqrt{3}/2)-(9/32)\cdot(2\sqrt{3}/3)=\pi/12+\sqrt{3}/8-$$

$$-3\sqrt{3}/16=\pi/12-\sqrt{3}/16\ \text{(кв. од.)}.$$

1.3.2 Довжина дуги кривої

1.	Довжина дуги плоскої лінії у декартовій системі координат: а) явно задана лінія $L:\ y=y(x),\quad a\le x\le b$.	$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\ dx$
	б) параметрично задана лінія $L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta$.	$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\ dt$

2.	Довжина дуги плоскої лінії у полярній системі координат $L:\rho=\rho(\varphi),\quad \alpha\le\varphi\le\beta$.	$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$
3.	Довжина дуги просторової лінії у декартовій системі координат: $L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), \quad \alpha\le t\le\beta.\\ z=z(t),\end{cases}$	$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$

ПРИКЛАД 1. Знайти довжину вказаної дуги

$$y=\ln x,\ \ x\in[\sqrt{3};\sqrt{8}].$$

<u>*Розв'язання*</u>*:* Лінія задана в прямокутній системі координат в явному вигляді, тому використаємо випадок 1а. Знайдемо похідну $y'=1/x$. Тоді

$$L=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(1/x)^2}dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}x^2+1=t^2; & dx=t\,dt\big/\sqrt{t^2-1}\\ \sqrt{1+x^2}=t; & t_1=\sqrt{1+3}=2;\\ x=\sqrt{t^2-1}; & t_2=\sqrt{1+8}=3\end{matrix}\right|=\int\limits_{2}^{3}\frac{t\cdot t\,dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{t^2-1}}=$$

$$=\int\limits_{2}^{3}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int\limits_{2}^{3}dt+\int\limits_{2}^{3}\frac{dt}{t^2-1}=t\,|_2^3+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3=$$

$$= 3 - 2 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3} \right) = 1 + (1/2)\ln(3/2) \text{ (од.).}$$

ПРИКЛАД 2. Знайти довжину кола $x^2 + y^2 = R^2$.

<u>*Розв'язання:*</u> Лінія задана в прямокутній системі координат. Довжина L_1 частини кола, що розташована у першому квадранті, співпадає з довжинами частин, розташованих у інших квадрантах. Рівняння кола тут має вигляд $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, звідки $y' = -x/(R^2 - x^2)^{1/2}$. Тоді довжину L всього кола можна обчислити так:

$$L = 4L_1 = 4\int_0^R \sqrt{1 + x^2/(R^2 - x^2)}\, dx = 4\int_0^R R/(R^2 - x^2)^{1/2}\, dx =$$

$$= 4R \arcsin(x/R)\Big|_0^R = 4R(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 2\pi R \text{ (од.).}$$

ПРИКЛАД 3. Знайти довжину астроїди:

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}.$$

<u>*Розв'язання:*</u> Лінія задана в прямокутній системі координат в параметричному вигляді, тому використаємо випадок 1б. Для цього спочатку знайдемо

$$x'(t) = 2 \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) = -6\cos^2 t \sin t,$$

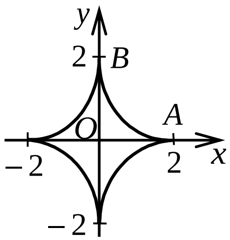
$$y'(t) = 2 \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t = 6\sin^2 t \cos t.$$

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 = \left(-6\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(6\sin^2 t \cos t\right)^2 =$$

$$= 36\cos^4 t \sin^2 t + 36\sin^4 t \cos^2 t = 36\cos^2 t \sin^2 t\,(\sin^2 t + \cos^2 t) =$$

$$= 36\cos^2 t \sin^2 t;$$

$$\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = \sqrt{36\cos^2 t \sin^2 t} = 6\cos t \sin t = 3\sin 2t.$$



Чверть L_{AB} астроїди розміщена в першому квадранті від точки $A(2;0)$ до точки $B(0,2)$. Знайдемо значення параметра t, що відповідають кінцям цієї дуги:

$$2\cos^3 t = 2;\quad \cos t = 1;\quad \alpha = 0;$$

$$2\cos^3 t = 0;\quad \cos t = 0;\quad \beta = \pi/2.$$

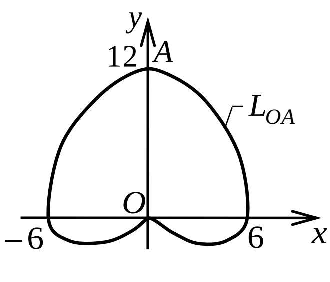
Тоді довжина всієї астроїди:

$$L = 4\cdot 3\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = -12\cdot(1/2)\cos 2t\,\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -6(-1-1) = 12 \text{ (од.)}.$$

ПРИКЛАД 4. Знайти довжину кардіоїди $\rho = 6(1+\sin\varphi)$.

<u>*Розв'язання:*</u> Лінія задана в полярній системі координат, тому використаємо випадок 2. Кардіоїда симетрична відносно осі Oy. Тому її довжину L можна знайти, подвоївши довжину L_1 її правої частини L_{OA}, що розташована в четвертій та першій чвертях і при цьому $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Проведемо обчислення:



$$\rho' = 6(1+\sin\varphi)' = 6\cos\varphi;$$

$$\rho^2 + (\rho')^2 = (6(1+\sin\varphi))^2 +$$

$$+ (6\cos\varphi)^2 = 36(1 + 2\sin\varphi +$$

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 36\cdot 2(1+\sin\varphi) =$$

$$= 72(1+\cos(\pi/2-\varphi)) =$$

$$72\cdot 2\cos^2\big((\pi/2-\varphi)/2\big) =$$

$$= 144\cos^2(\pi/4-\varphi/2);$$

$$\sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}=12\left|\cos(\pi/4-\varphi/2)\right|=12\cos(\pi/4-\varphi/2)\,;$$

$$L=2L_1=2\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}\,d\varphi=2\cdot 12\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=24\cdot(-2)\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=-48(\sin 0-\sin(\pi/2))=48\ \text{(од.)}.$$

ПРИКЛАД 5. Знайти довжину заданої дуги гвинтової лінії:

$$\begin{cases} x=6\cos t \\ y=6\sin t\,, \quad t\in[0;2\pi]. \\ z=8t \end{cases}$$

Розв'язання: Задано просторову лінію в прямокутній системі координат в параметричному вигляді, тому використаємо випадок 3. Тому

$$x'=-6\sin t\,;\quad y'=6\cos t\,;\quad z'=8\,;$$

$$\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}=\sqrt{(-6\sin t)^2+(6\cos t)^2+8^2}=$$

$$=\sqrt{36(\sin^2 t+\cos^2 t)+64}=\sqrt{100}=10\,;$$

$$L=10\int_0^{2\pi}dt=10t\Big|_0^{2\pi}=20\pi\ \text{(од.)}.$$

1.3.3 Об'єм тіла

1.	Об'єм тіла з відомими площами поперечних перерізів. $S(x)$ – площа перерізу	$V=\int_a^b S(x)\,dx$

	тіла площиною, перпендикулярною осі Ox, $a \le x \le b$	
2.	Об'єм тіла обертання: а) $D: y = y(x) \ge 0,\ y = 0,$ $x = a,\ x = b,$ вісь обертання – Ox б) $D: x = x(y) \ge 0,\ x = 0,$ $y = c,\ y = d,$ вісь обертання – Oy	а) $V_x = \pi \int\limits_a^b y^2(x)\,dx$ б) $V_y = \pi \int\limits_c^d x^2(y)\,dy$
3.	Об'єм тіла обертання: $D: \rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$ вісь обертання – полярна вісь	$V_\rho = \dfrac{2\pi}{3} \int\limits_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin\varphi\, d\varphi$

ПРИКЛАД 1. Знайти об'єм еліпсоїда

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

<u>*Розв'язання:*</u> У перерізі еліпсоїда площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, утворюється еліпс

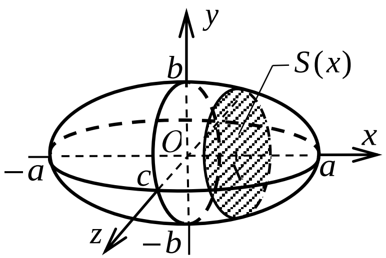
$$\begin{cases} y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 - x^2/a^2; \\ x = const \end{cases}$$

або $\quad y^2\Big/\left(b^2(1 - x^2/a^2)\right) + z^2\Big/\left(c^2(1 - x^2/a^2)\right) = 1$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - x^2/a^2},\ c_1 = c\sqrt{1 - x^2/a^2}$.

Площа такого еліпса $S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - x^2/a^2\right)$.

Обчислимо об'єм еліпсоїда, враховуючи його



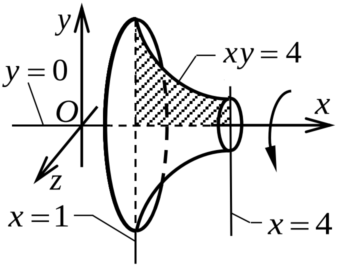
симетрію відносно площини Oyz:

$$V = \pi bc\int_{-a}^{a}(1-x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\int_{0}^{a}(1-x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\left(x - x^3/(3a^2)\right)\Big|_0^a = (4/3)\pi\, abc$$

(куб.од.).



ПРИКЛАД 2. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, навколо осі Ox.

<u>*Розв'язання:*</u> Тіло, об'єм якого треба знайти, зображене на рис. Фігура (криволінійна трапеція), що обертається, показана штриховкою.

Проведемо обчислення:

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx =$$

$$= \pi\int_1^4 (4/x)^2\,dx = 16\pi\int_1^4 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 16\pi(-1/x)\Big|_1^4 = -16\pi\cdot(1/4 - 1) = 12\pi \text{ (куб.од.).}$$

ПРИКЛАД 3. Знайти об'єм частини параболоїда, утвореної обертанням дуги параболи $y = x^2$, $x \in [0;2]$ навколо осі Oy.

Розв'язання: З рівняння параболи $x = x(y) = \sqrt{y}$, $y \in [0;4]$. Тоді

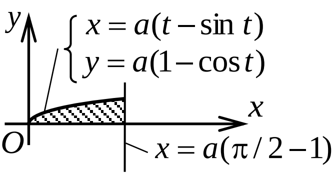
$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi (y^2/2)\Big|_0^4 = 8\pi \text{ (куб.од.).}$$

ПРИКЛАД 4. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням криволінійної трапеції, обмеженої дугою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; \pi/2]$, прямою $x = a(\pi/2 - 1)$ і віссю Ox, навколо осі Ox.

Розв'язання: Фігура, обертанням якої утворюється тіло, зображена на рис. Проведемо обчислення:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \left| x = x(t);\ y = y(t);\ dx = x'(t)\,dt \right| =$$

$$= \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\, x'(t)\, dt =$$



$$= \left| \begin{matrix} x = a\,(t - \sin t); & t_1 = 0; \\ dx = a\,(1 - \cos t) & t_2 = \pi/2 \\ dt;\ \ y = a\,(1 - \cos t); & \end{matrix} \right| =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} a^2 (1 - \cos t)^2 a (1 - \cos t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos t)^3 dt =$$

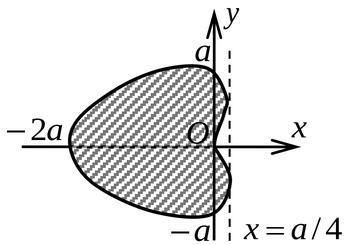
$$\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - 3\cos t + (3/2)(1 + \cos 2t) -$$

$$-(1 - \sin^2 t)\cos t)\, dt = \pi a^3 \Big[\Big(t - 3\sin t + (3/2)t + (3/4)\sin 2t -$$

$$- \sin t + (1/3)\sin^3 t\Big)\Big|_0^{\pi/2}\Big] = (15\pi - 44)\pi a^3/12 \quad \text{(куб.од.).}$$

ПРИКЛАД 5. Кардіоїда $\rho = a(1-\cos\varphi)$ обертається навколо полярної осі. Знайти об'єм тіла обертання.



Розв'язання: Задана кардіоїда зображена на рис. Скористаємося формулами зв'язку між прямокутними і полярними координатами і зробимо заміну змінної:

$$V_\rho = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi (a(1-\cos\varphi))^3 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^\pi (1-\cos\varphi)^3 \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = 1-\cos\varphi;\ dt = \sin\varphi\, d\varphi; \\ t_1 = 1-\cos 0 = 1-1 = 0; \\ t_2 = 1-\cos\pi = 1-(-1) = 2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^2 t^3\, dt = \frac{2\pi a^3}{3}\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2\pi a^3}{3}\cdot\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{2\pi a^3}{3}\cdot\frac{16}{4} =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}\cdot 4 = \frac{8\pi a^3}{3} \text{ (куб.од.).}$$

1.3.4 Площа поверхні обертання

1.	Площа поверхні утвореної обертанням кривої, що задана в прямокутній системі координат:	$S_x = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\, dx$

	а) $L: \; y = y(x) \geq 0$, $x = a, \; x = b$, вісь обертання – Ox б) $L: \; x = x(y) \geq 0$, $y = c, \; y = d$, вісь обертання – Oy .	$S_y = 2\pi \int\limits_c^d x(y) \sqrt{1 + x'^2(y)} \, dy$
2.	Площа поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої, що задана в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi$	$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \sin\varphi \times$ $\times \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} \, d\varphi$
3.	Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої, що задана у параметричній формі $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$	$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \times$ $\times \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

ПРИКЛАД 1. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги параболи $y^2 = 2px$ $(0 \leq x \leq 2p; \; p > 0)$ навколо осі Ox .

Розв'язання: Спочатку рівняння дуги параболи запишемо у явному вигляді, виразивши y через x:

$y = \sqrt{2px}$. Потім знайдемо похідну: $y' = \dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$.

Далі обчислимо площу:

$$S = 2\pi\int_0^{2p} \sqrt{2px} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi\sqrt{2p}\int_0^{2p} \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{2p}{4x}}\, dx = 2\pi\sqrt{2p}\int_0^{2p} \sqrt{x\cdot\frac{4x+2p}{4x}}\, dx =$$

$$= 2\pi\sqrt{2p}\int_0^{2p} \sqrt{\frac{4x+2p}{4}}\, dx = 2\pi\sqrt{2p}\int_0^{2p} \frac{\sqrt{4x+2p}}{2}\, dx =$$

$$= \pi\sqrt{2p}\int_0^{2p} \sqrt{2}\cdot\sqrt{2x+p}\, dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^{2p} \sqrt{2x+p}\, dx =$$

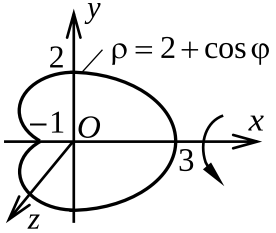
$$= 2\pi\sqrt{p}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+p)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{2p} = \pi\sqrt{p}\cdot\left(\frac{(2\cdot 2p+p)^{3/2}}{3/2} - \frac{p^{3/2}}{3/2}\right) =$$

$$= \pi\sqrt{p}\cdot\frac{(5p)^{3/2} - p^{3/2}}{3/2} = \pi\sqrt{p}\cdot\frac{2p^{3/2}(\sqrt{5^3}-1)}{3} = \frac{2\pi p^2}{3}(\sqrt{5^3}-1)$$

(кв. од.).

ПРИКЛАД 2. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням равлика Паскаля $\rho = 2+\cos\varphi$ навколо полярної осі.

Розв'язання: Равлик Паскаля зображений на рис. Він симетричний відносно полярної осі. Поверхня обертання утворюється рухом верхньої половини равлика Паскаля, де $\varphi \in [0;\pi]$.



Проведемо обчислення:

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(\varphi)\, dl = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi \times$$

$$\times\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi =$$

$$= \big|\rho = 2+\cos\varphi;\ \rho' = -\sin\varphi;$$

$$\rho^2+(\rho')^2=(2+\cos\varphi)^2+$$

$$+\sin^2\varphi=5+4\cos\varphi;\;\;\alpha=0;\;\beta=\pi\Big|=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}(2+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi=\Big|t=\cos\varphi;$$

$$dt=-\sin\varphi\,d\varphi;\;\;t_1=\cos0=1;\;\;t_2=\cos\pi=-1\Big|=$$

$$=-2\pi\int_1^{-1}(2+t)\sqrt{5+4t}\,dt=\Big|5+4t=u^2;\;\;t=(u^2-5)/4;$$

$$dt=(1/2)u\,du;\;u=\sqrt{5+4t};\;u_1=\sqrt{5+4}=3;\;u_2=\sqrt{5-4}=1\Big|=$$

$$=-2\pi\int_3^1(2+(u^2-5)/4)u\,(1/2)u\,du=-(\pi/4)\int_3^1(3+u^2)u^2\,du=$$

$$=-(\pi/4)\int_3^1(3u^2+u^4)\,du=-(\pi/4)\left(u^3+(1/5)u^5\right)\Big|_3^1=$$

$$=-(\pi/4)\left(1+1/5-27-243/5\right)=93\pi/5\;\;\text{(кв. од.)}.$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $\begin{cases}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{cases}$, $\left(0\le t\le\pi\right)$ навколо осі Ox.

<u>Розв'язання</u>: Астроїда симетрична відносно обох координатних осей. Шукана площа S дорівнює подвоєній площі S_1 поверхні, описаної дугою астроїди, що лежить у першій чверті $\left(0\le t\le\pi/2\right)$. Проведемо обчислення:

$$S=2S_1=2\cdot2\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\Big|x=a\cos^3t;$$

$$y=a\sin^3t;\;\;x'(t)=-3a\cos^2t\sin t;\;\;y'(t)=3a\sin^2t\cos t;$$

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{9a^2(\cos^4t\sin^2t+\sin^4t\cos^2t)}=$$

$$=3a\sin t\cos t;\ t_1=0;\ t_2=\pi/2 \Big| =4\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\times=$$ $$\times\cos t\,dt=12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cdot\cos t\,dt=12\pi a^2(1/5)\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2}=.$$ $$=(12/5)\pi a^2\ \text{(кв. од.)}.$$

1.3.5 Маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої дуги

1.	Маса дуги плоскої кривої $L:\ y=y(x),\quad a\le x\le b$, $\mu=\mu(x)$ – лінійна густина	$m=\int\limits_a^b \mu\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$
2.	Статичні моменти плоскої кривої відносно координатних осей $L:\ y=y(x),\quad a\le x\le b$, $\mu=\mu(x)$ – лінійна густина	$M_x=\int\limits_a^b \mu\, y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ $M_y=\int\limits_a^b \mu\, x\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$
3.	Моменти інерції плоскої кривої відносно координатних осей $L:\ y=y(x),\quad a\le x\le b$, $\mu=\mu(x)$ – лінійна густина	$I_x=\int_a^b y^2\,\mu(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$ $I_y=\int_a^b x^2\mu(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$

4.	Координати центра мас плоскої кривої $L:\ y=y(x),\quad a\le x\le b$	$x_c=\dfrac{M_y}{m}$; $y_c=\dfrac{M_x}{m}$

ПРИКЛАД. Для дуги кола $y=\sqrt{9-x^2}$, $x\in[0;3]$, розташованої у першій координатній чверті, знайти масу m, статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно осей Ox та Oy, а також координати центра мас $C(x_c,y_c)$. Лінійна густина $\mu(x)=\mu_0=const$.

<u>*Розв'язання:*</u> Знайдемо диференціал довжини дуги:

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\ ;\quad dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}\,dx=\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}\ .$$

Обчислимо масу дуги:

$$m=\int_a^b\mu(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^3\mu_0\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=3\mu_0\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=$$

$$=3\mu_0\arcsin(x/3)\Big|_0^3=3\mu_0(\arcsin 1-\arcsin 0)=3\mu_0\,\pi/2\ .$$

Знайдемо статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас:

$$M_x=\int_a^b y\,\mu(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{9-x^2}\mu_0\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=3\mu_0\int_0^3 dx=$$

$$=3\rho_0\,x\,\Big|_0^3=9\rho_0\ ;\quad M_y=\int_a^b x\,\mu(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^3\frac{3x\mu_0}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=9-x^2;\ du=-2xdx;\\ u_1=9;\qquad u_2=0\end{matrix}\right|=-\frac{3}{2}\mu_0\int_9^0\frac{du}{\sqrt{u}}=-3\mu_0\sqrt{u}\Big|_9^0=9\mu_0\ ;$$

$$I_x=\int_a^b y^2\,\mu(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^3(9-x^2)\mu_0\,\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=$$

$$=3\mu_0\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\Big|\;x=3\sin u;\;\;dx=3\cos u\,du;$$

$$\sqrt{9-x^2}=3\cos u;\;u=\arcsin(x/3);\;u_1=\arcsin 0=0;$$

$$u_2=\arcsin 1=\pi/2\,\Big|=3\mu_0\int_0^{\pi/2}3\cos u\cdot 3\cos u\,du=$$

$$=27\mu_0\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,du=(27/2)\,\mu_0\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2u)\,du=$$

$$=(27/2)\,\mu_0\,(u+(1/2)\sin 2u)\Big|_0^{\pi/2}=27\pi\mu_0/2\,;$$

$$I_y=\int_a^b x^2\,\mu(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^3 x^2\mu_0\,\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=3\mu_0\int_0^3\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=$$

$$=\Big|\;x=3\sin u;\;\;dx=3\cos u\,du;\;\sqrt{9-x^2}=3\cos u;$$

$$u=\arcsin(x/3);\;\;u_1=\arcsin 0=0;\;u_2=\arcsin 1=\pi/2\,\Big|=$$

$$=3\mu_0\int_0^{\pi/2}\frac{(3\sin u)^2\cdot 3\cos u\,du}{3\cos u}=27\mu_0\int_0^{\pi/2}\sin^2 u\,du=$$

$$(27/2)\,\mu_0\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2u)\,du=(27/2)\,\mu_0\,(u-(1/2)\sin 2u)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{27\pi\mu_0}{2};\quad x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{9\mu_0}{3\pi\mu_0/2}=6\pi;\quad y_c=\frac{M_x}{m}=6\pi.$$

1.3.6 Наближене обчислення визначених інтегралів

1.	Формула лівих прямокутників	$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})$

2.	Формула правих прямокутників	$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)$
3.	Формула трапецій	$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}\right)$
4.	Формула парабол (формула Симпсона)	$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\cdot\left[y_0+y_n+\right.$ $+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+$ $\left.+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})\right]$, де n - парне число.

ПРИКЛАД 1. Обчислити наближене значення визначеного інтеграла $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx$ за допомогою формули прямокутників, розбивши відрізок інтегрування на 10 частин (обчислення проводити з округленням до другого десяткового знаку).

Розв'язання: Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a,b]=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ на $n=10$ рівних частин. Тоді $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$.

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi/2-0}{10}=\frac{\pi}{20}.$$

$$x_k=a+k\cdot\Delta x:$$

$$x_0=0+0\cdot\frac{\pi}{20}=0,\quad x_1=0+1\cdot\frac{\pi}{20}=\frac{\pi}{20},\quad x_2=0+2\cdot\frac{\pi}{20}=\frac{\pi}{10},$$

$$x_3=0+3\cdot\frac{\pi}{20}=\frac{3\pi}{20},\quad x_4=0+4\cdot\frac{\pi}{20}=\frac{\pi}{5},\quad x_5=0+5\cdot\frac{\pi}{20}=\frac{\pi}{4},$$

$$x_6=0+6\cdot\frac{\pi}{20}=\frac{3\pi}{10},\quad x_7=0+7\cdot\frac{\pi}{20}=\frac{7\pi}{20},\quad x_8=0+8\cdot\frac{\pi}{20}=\frac{2\pi}{5}$$

$$x_9 = 0 + 9 \cdot \frac{\pi}{20} = \frac{9\pi}{20}, \quad x_{10} = 0 + 10 \cdot \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{2}.$$

Обчислимо значення підінтегральної функції при кожному значенні x:

$$y_0 = f(x_0) = \sin 0 = 0, \quad y_1 = f(x_1) = \sin\frac{\pi}{20} = 0{,}16,$$

$$y_2 = f(x_2) = \sin\frac{\pi}{10} = 0{,}31, \quad y_3 = f(x_3) = \sin\frac{3\pi}{20} = 0{,}45,$$

$$y_4 = f(x_4) = \sin\frac{\pi}{5} = 0{,}59, \quad y_5 = f(x_5) = \sin\frac{\pi}{4} = 0{,}71,$$

$$y_6 = f(x_6) = \sin\frac{3\pi}{10} = 0{,}81, \quad y_7 = f(x_7) = \sin\frac{7\pi}{20} = 0{,}89,$$

$$y_8 = f(x_8) = \sin\frac{2\pi}{5} = 0{,}95, \quad y_9 = f(x_9) = \sin\frac{9\pi}{20} = 0{,}99,$$

$$y_{10} = f(x_{10}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

За формулою лівих прямокутників:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx \approx \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{10} \cdot \left(0 + 0{,}16 + 0{,}31 + 0{,}45 + 0{,}59 + 0{,}71 + 0{,}81 + \right.$$

$$\left. + 0{,}89 + 0{,}95 + 0{,}99\right) = \frac{\pi}{20} \cdot 5{,}86 = 0{,}92.$$

За формулою правих прямокутників:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx \approx \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{10} \cdot \left(0{,}16 + 0{,}31 + 0{,}45 + 0{,}59 + 0{,}71 + 0{,}81 + 0{,}89 + \right.$$

$$\left. + 0{,}95 + 0{,}99 + 1\right) = \frac{\pi}{20} \cdot 6{,}86 = 1{,}08.$$

Обчислимо точне значення інтегралу:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = -0 - (-1) = 1.$$

ПРИКЛАД 2. Обчислити наближене значення визначеного інтеграла $\int_0^8 \frac{dx}{x+1}$ за допомогою формули трапецій, розбивши відрізок інтегрування на 10 частин (обчислення проводити з округленням до другого десяткового знаку).

Розв'язання: Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a,b]=[0,8]$ на $n=10$ рівних частин. Тоді $a=0$, $b=8$.

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{8-0}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

$$x_k=a+k\cdot\Delta x:$$

$$x_0=0+0\cdot\frac{4}{5}=0,\quad x_1=0+1\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}=0,8,$$

$$x_2=0+2\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5}=1,6,\quad x_3=0+3\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{5}=2,4,$$

$$x_4=0+4\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{5}=3,2,\quad x_5=0+5\cdot\frac{4}{5}=4,$$

$$x_6=0+6\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{5}=4,8,\quad x_7=0+7\cdot\frac{4}{5}=\frac{28}{5}=5,6,$$

$$x_8=0+8\cdot\frac{4}{5}=\frac{32}{5}=6,4,\quad x_9=0+9\cdot\frac{4}{5}=\frac{36}{5}=7,2,$$

$$x_{10}=0+10\cdot\frac{4}{5}=8.$$

Обчислимо значення підінтегральної функції при кожному значенні x:

$$y_0=f(x_0)=\frac{1}{0+1}=1,\quad y_1=f(x_1)=\frac{1}{0,8+1}=0,56,$$

$$y_2=f(x_2)=\frac{1}{1,6+1}=0,38,\quad y_3=f(x_3)=\frac{1}{2,4+1}=0,29,$$

$$y_4=f(x_4)=\frac{1}{3,2+1}=0,24,\quad y_5=f(x_5)=\frac{1}{4+1}=0,2,$$

$$y_6 = f\left(x_6\right) = \frac{1}{4,8+1} = 0,17, \quad y_7 = f\left(x_7\right) = \frac{1}{5,6+1} = 0,15,$$

$$y_8 = f\left(x_8\right) = \frac{1}{6,4+1} = 0,14, \quad y_9 = f\left(x_9\right) = \frac{1}{7,2+1} = 0,12,$$

$$y_{10} = f\left(x_{10}\right) = \frac{1}{8+1} = 0,11.$$

За формулою трапецій:

$$\int_0^8 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{8-0}{10} \cdot \left(\frac{1+0,11}{2} + 0,56 + 0,38 + 0,29 + 0,24 + 0,2 + 0,17 + \right.$$

$$\left. +0,15 + 0,14 + 0,12\right) = 0,8 \cdot 2,81 = 2,24.$$

Обчислимо точне значення інтегралу:

$$\int_0^8 \frac{dx}{x+1} = \ln\left|x+1\right|\Big|_0^8 = \ln\left|8+1\right| - \ln\left|0+1\right| = \ln 9 - 0 = \ln 9 \approx 2,2.$$

ПРИКЛАД 3. Обчислити наближене значення визначеного інтеграла $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}\, dx$ за допомогою формули Симпсона, розбивши відрізок інтегрування на 10 частин (обчислення проводити з округленням до третього десяткового знаку).

<u>*Розв'язання*</u>*:* Розіб'ємо відрізок інтегрування $\left[a,b\right] = \left[-2,8\right]$ на $n = 10$ рівних частин. Тоді $a = -2$, $b = 8$.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-(-2)}{10} = \frac{8+2}{10} = 1.$$

$$x_k = a + k \cdot \Delta x:$$

$$x_0 = -2 + 0 \cdot 1 = -2, \quad x_1 = -2 + 1 \cdot 1 = -2 + 1 = -1,$$

$$x_2 = -2 + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0, \quad x_3 = -2 + 3 \cdot 1 = -2 + 3 = 1,$$

$$x_4 = -2 + 4 \cdot 1 = -2 + 4 = 2, \quad x_5 = -2 + 5 \cdot 1 = -2 + 5 = 3,$$

$$x_6 = -2 + 6 \cdot 1 = -2 + 6 = 4, \quad x_7 = -2 + 7 \cdot 1 = -2 + 7 = 5,$$

$$x_8 = -2 + 8 \cdot 1 = -2 + 8 = 6, \quad x_9 = -2 + 9 \cdot 1 = -2 + 9 = 7,$$

$$x_{10} = -2 + 10 \cdot 1 = -2 + 10 = 8 .$$

Обчислимо значення підінтегральної функції при кожному значенні x:

$$y_0 = \sqrt{(-2)^3 + 16} = \sqrt{-8+16} = \sqrt{8} = 2,828 ,$$

$$y_1 = \sqrt{(-1)^3 + 16} = \sqrt{-1+16} = \sqrt{15} = 3,873 ,$$

$$y_2 = \sqrt{0^3 + 16} = \sqrt{16} = 4 , \quad y_3 = \sqrt{1^3 + 16} = \sqrt{17} = 4,123 ,$$

$$y_4 = \sqrt{2^3 + 16} = \sqrt{8+16} = \sqrt{24} = 4,899 ,$$

$$y_5 = \sqrt{3^3 + 16} = \sqrt{27+16} = \sqrt{43} = 6,557 ,$$

$$y_6 = \sqrt{4^3 + 16} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 8,944 ,$$

$$y_7 = \sqrt{5^3 + 16} = \sqrt{125+16} = \sqrt{141} = 11,874 ,$$

$$y_8 = \sqrt{6^3 + 16} = \sqrt{216+16} = \sqrt{232} = 15,232 ,$$

$$y_9 = \sqrt{7^3 + 16} = \sqrt{343+16} = \sqrt{359} = 18,947 ,$$

$$y_{10} = \sqrt{8^3 + 16} = \sqrt{512+16} = \sqrt{528} = 22,978 .$$

За формулою Симпсона:

$$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}\, dx = \frac{b-a}{3n}\left[y_0 + y_{10} + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 \right) + \right.$$

$$\left. +2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 \right) \right] = \frac{8-(-2)}{3 \cdot 10}\left[2,828 + 22,978 + \right.$$

$$+4\left(3,873 + 4,123 + 6,557 + 11,874 + 18,947 \right) +$$

$$\left. +2\left(4 + 4,899 + 8,944 + 15,232 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[25,806 + 4 \cdot 45,374 + 2 \cdot 33,075 \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[25,806 + 181,496 + 66,15 \right] = \frac{1}{3} \cdot 273,452 = 91,151 .$$

Даний інтеграл можна обчислити тільки наближеними методами.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

2.1 Диференціальні рівняння першого порядку

Назва рівняння	Його вигляд та розв'язок
Рівняння з відокремлени-ми змінними	Називають рівняння що має вигляд $$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)\cdot dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)\cdot dy=0$$ де $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ – функції від y; $f_1(x)$, $f_2(x)$ – функції від x. *Розв'язання:* Поділити рівняння на добуток $f_2(x)\cdot\varphi_1(y)$ та отримати $$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\cdot dy=0.$$ Тоді загальний інтеграл рівняння такий $$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C.$$ *Зауваження*. Під час ділення на добуток $f_2(x)\cdot\varphi_1(y)$ можна втратити розв'язок заданого рівняння, при якому цей добуток дорівнює нулю. (див. Додаток 2) АБО має такий вигляд $$y'=f(x)\cdot\varphi(y)$$ *Розв'язання*: Підставимо замість y'

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

вираз $y' = \dfrac{dx}{dy}$ отримаємо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \varphi(y)$$

Помножимо обидві частини рівняння на вираз $\dfrac{dx}{\varphi(y)}$ і отримаємо рівняння

$\dfrac{dy}{\varphi(y)} = f(x) \cdot dx$ та проінтегруємо

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x) \cdot dx$$

Це і буде загальний розв’язок рівняння.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

ПРИКЛАД. Проінтегрувати рівняння

$$\left(1 + x^2\right) \cdot dx - 2xy \cdot dx = 0.$$

<u>*Розв’язання*</u>: Задане рівняння – це рівняння з відокремленими змінними. Поділимо обидві частини рівняння на добуток $\left(1 + x^2\right) \cdot y$, отримаємо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{y} - \frac{2xdx}{1 + x^2} = 0.$$

Проінтегруємо це рівняння $\displaystyle\int \frac{dy}{y} - \int \frac{2xdx}{1 + x^2} = 0$ та знайдемо його загальний розв’язок

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

$$\ln|y| - \ln(1+x^2) = \ln C,\ \ln\frac{|y|}{1+x^2} = \ln C,\ y = C(1+x^2).$$

Зауваження. Під час ділення на добуток $(1+x^2)\cdot y$ ми вважали, що $(1+x^2)\cdot y \neq 0$, тобто $(1+x^2) \neq 0$ та $y \neq 0$. Але $y = 0$ – розв’язок рівняння, в цьому можна впевнитися безпосередньо. Цей розв’язок отримано з загального розв’язку якщо $C = 0$.

</td></tr>
<tr><td>Однорідне диференціальне рівняння першого порядку</td><td>

$$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0,$$

якщо коефіцієнти $P(x,y), Q(x,y)$ однорідні функції одного і того ж виміру n (див. Додаток 3) .

АБО

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

<u>*Розв’язання:*</u> За допомогою підстановки $y = u\cdot x$, де u - нова невідома функція, однорідне рівняння перетворюється в рівняння з відокремленими змінними.

<u>Примітка.</u> Якщо рівняння має вигляд

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

для якого $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

перетворенням $\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}$, де постійні

x_0, y_0 знаходять з системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

зводиться до однорідного рівняння. Якщо $\Delta = 0$, то за допомогою перетворення $a_1 x + b_1 y = t$ рівняння зводиться до рівняння з відокремленими змінними. (приклад наведено у додатку 4)

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

ПРИКЛАД. Проінтегрувати однорідне диференціальне рівняння $(2xy + y^2)dx + (2xy + x^2)dy = 0$.

<u>*Розв'язання*</u>: Функції $P(x,y) = 2xy + y^2$; $Q(x,y) = 2xy + x^2$ є функціями другого порядку. Нехай $y = u \cdot x$, тоді $dy = u \cdot dx + xdu$. Підставимо в задане рівняння та отримаємо

$$(2xux + (ux)^2)dx + (2xux + x^2)(u \cdot dx + xdu) = 0$$

після скорочення на x^2 рівняння матиме вигляд

$$(2u + u^2)dx + (2u + 1)(u \cdot dx + xdu) = 0$$

Відкриємо дужки та приведемо подібні

$$3u(1 + u \quad)dx + (2u + 1)xdu = 0,$$

маємо рівняння з відокремленими змінними. Загальний розв'язок якого має вигляд

$$xy(x + y) = C$$

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Лінійні диференціальні рівняння першого порядку</td>
<td>
Називають рівняння вигляду

$$\varphi_1(x)\cdot y'+\varphi_2(x)\cdot y+\varphi_3(x)=0,$$

причому $\varphi_1(x)\neq 0$

АБО

$$y'+p(x)\cdot y=q(x).$$

<u>Розв’язання:</u> Розв’язок такого рівняння знаходять у вигляді

$$y=u(x)\cdot v(x),$$

зрозуміло що

$$y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

Підстановки виразів для y та y' в рівняння приведе його до вигляду

$$v\frac{du}{dx}+\left[\frac{dv}{dx}+p(x)\cdot v\right]\cdot u=q(x).$$

В якості функції v обирають одну функцію, що задовольняє рівнянню

$$\frac{dv}{dx}+p(x)\cdot v=0,$$

тоді u функцію визначають з рівняння

$$v\frac{du}{dx}=q(x).$$

<u>Примітка.</u> Якщо в задано рівнянні $q(x)=0$, тобто має вигляд

$$y'+p(x)\cdot y=0$$

То рівняння називають лінійним однорідним, а його загальний розв’язок визначають за формулою
</td>
</tr>
</table>

	$y = Ce^{-\int p(x)dx}$. Інші методи розв'язку лінійного неоднорідного рівняння дивись у Додатку 5.

ПРИКЛАД 1. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціальне рівняння $y' - \dfrac{xy}{x^2+1} = x$.

<u>*Розв'язання*</u>: Задане рівняння лінійне, в якому $p(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$, $q(x) = x$. Покладемо $y = u \cdot v$, тоді $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Маємо таке рівняння $u' \cdot v + u \cdot v' - \dfrac{xuv}{x^2+1} = x$. Розв'яжемо два таких рівняння з відокремленими змінними: $v' - \dfrac{xv}{x^2+1} = 0$, $u' \cdot v = x$.

1) $v' = \dfrac{xv}{x^2+1}$, $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{xv}{x^2+1}$, $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{xdx}{x^2+1}$, $\int \dfrac{dv}{v} = \int \dfrac{xdx}{x^2+1}$, $v = \sqrt{x^2+1}$;

2) $u' \cdot v = x$, $u' \cdot \sqrt{x^2+1} = x$, $\dfrac{du \cdot}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\dfrac{du \cdot}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

$u = \sqrt{x^2+1} + C$. Та запишемо загальний розв'язок рівняння $y = \sqrt{x^2+1} \cdot \left(\sqrt{x^2+1} + C \right)$.

ПРИКЛАД 2. Знайти загальний розв'язок диференціальне рівняння, застосовуючи метод варіації довільної сталої (див. Додаток 5)

$$y' - y \cdot thx = 1/2$$

Розв'язання: Розв'яжемо спочатку однорідне диференціальне рівняння $y' - y \cdot thx = 0$ $\frac{dy}{dx} - y \cdot thx = 0$, $\ln y = \int thx dx$, $\ln y = \ln chx + \ln C$, $y = C \cdot chx$. Розв'яжемо неоднорідне рівняння, рішення якого шукатимемо у вигляді $y = C(x) \cdot chx$, тобто $C(x)$ - функція від x. Продиферецiюємо, отримаємо $y' = C'(x) \cdot chx + C(x) \cdot shx$ та підставимо вирази для y та y' в задане рівняння, маємо $$C'(x) \cdot chx + C(x) \cdot shx - C(x) \cdot chx \cdot thx = 1/2,$$ $$C'(x) \cdot chx = 1/2, \quad C'(x) = \frac{1}{2chx}$$, звідси $$C(x) = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = arctge^x + C_1,$$ тобто $y = chx \cdot \left(arctge^x + C_1 \right)$

Рівняння Бернуллі	$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^{\alpha}$$ де α - дійсне число. *Розв'язання:* за допомого підстановки $u = y^{1-\alpha}$ зводиться до лінійного

ПРИКЛАД. Проінтегрувати рівняння $$dy/dx + 8\sin 8x \cdot y = 4\sin 8x \cdot y^3.$$ *Розв'язання*: 1-й спосіб: це рівняння Бернуллі, застосуємо підстановку $u = y^{1-\alpha}$, тоді 2-й спосіб: застосуємо підстановку Бернуллі $y = uv$; $y' = u'v + uv'$, тоді:

$$u'v + uv' + 8\sin 8x \cdot uv = 4\sin 8x \cdot u^3 v^3;$$

$$u'v + u\left(v' + 8\sin 8x \cdot v\right) = 4\sin 8x \cdot u^3 v^3;$$

розв'яжемо два рівняння 1) $v' + 8\sin 8x \cdot v = 0$ і 2) $u'v = 4\sin 8x \cdot u^3 v^3$.

1)

$v' = -8\sin 8xv;\ dv/dx = -8\sin 8xv;\int dv/v = -8\int \sin 8xdx$;

$\ln|v| = -8\cdot(-1/8)\cos 8x, (C=0);\ v = e^{\cos 8x}.$

2) $u'v = 4\sin 8x \cdot u^3 v^3$; $u'e^{\cos 8x} = 4\sin 8x \cdot u^3 e^{3\cos 8x}$;

$\int du/u^3 = \int 4\sin 8x \cdot e^{2\cos 8x};$

$-1/2u^2 = -4/16\int e^{2\cos 8x} d(2\cos 8x);$

$1/u^2 = (1/2)\,e^{2\cos 8x} + C;$

$u^2 = 2/(e^{2\cos 8x} + 2C); u = \sqrt{2/(e^{2\cos 8x} + 2C)}.$

Виконаємо обернену підстановку: $y = uv = \sqrt{2/(e^{2\cos 8x} + 2C)} \cdot e^{\cos 8x}$ - загальний розв'язок диференціального рівняння.

Рівняння в повних диференціалах	Це рівняння, які мають вигляд $P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$, ліва частина якого є повним диференціалом деякої функції $P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = du(x,y)$. Це рівняння також можна представити у вигляді $du(x,y) = 0$, а його загальний інтеграл матиме

вигляд $du(x,y)=C$.

Функція $u(x,y)$ може бути знайдена із системи рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y);\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y).$$

Рівність $$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

є необхідною й достатньою умовою того, що ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції. Випадок коли ліва частина не є повним диференціалом розглянуто у Додатку 6

ПРИКЛАД. Проінтегрувати рівняння

$$\left(2xy+x^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy=0$$

<u>*Розв'язання*</u>: У цьому рівнянні $P(x,y)=2xy+x^2$ $Q(x,y)=x^2-y^2$, звідси $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$; $\frac{\partial P}{\partial y}=2x$. Оскільки умова $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ виконується маємо рівняння в повних диференціалах. Отже, $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+x^2$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-y^2$. Із першої рівності маємо

$$u(x,y)=\int(2xy+x^2)dx=x^2y+x^3/3+\varphi(y).$$

Продифенцюємо функцію $u(x,y)$ за змінною y:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+\varphi'(y).$$

Оскільки

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2$, то маємо рівність $x^2 - y^2 = x^2 + \varphi'(y)$, звідси $\varphi(y) = \int - y^2 dy = -\frac{y^3}{3} + C_1$. Підставимо знайдений вираз в формулу для $u(x, y)$, отримаємо рішення

$$u(x, y) = x^2 y + x^3/3 - y^3/3 + C_1 = C_2,$$

$$\text{або} \quad x^2 y + x^3/3 - y^3/3 = C_3$$

це і є загальний інтеграл.

2.2 Диференційні рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку

Назва рівняння	Його вигляд та розв'язок
I тип Рівняння, які містять тільки y'' та змінну x	Це рівняння, що має вигляд $F(x, y'') = 0$ або $y'' = f(x)$ де $f(x)$ – функція від x. *Розв'язання:* Шляхом послідовного двократного інтегрування знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння: $\int y'' dx = \int f(x) dx + C_1;$ $y' = \int f(x) dx + C_1;$ $\int y' dx = \int (\int f(x) dx) dx + \int C_1 dx + C_2;$

<table>
<tr><td></td><td>

$y' = \int (\int f(x)dx)dx + C_1 x + C_2$ - загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння другого порядку.

<u>*Зауваження.*</u> У випадку диференціального рівняння n-го порядку $(n \geq 2)$ вигляду $y^{(n)} = f(x)$ загальний розв'язок знаходиться n-кратним інтегруванням.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

ПРИКЛАД 1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' = \frac{x}{e^x} - 5x^3 + \cos x.$$

<u>*Розв'язання*</u>: Задане рівняння – це рівняння, яке містить y'' і змінну x. Інтегруємо це рівняння $\int y''dx = \int \frac{xdx}{e^x} - \int 5x^3 dx + \int \cos x dx + C_1$, інтеграл $\int \frac{xdx}{e^x}$ обчислимо за допомогою інтегрування частинами: $\int udv = uv - \int vdu$, $u = x$; $du = dx$; $dv = e^{-x}dx$; $v = -e^{-x}$, тоді

$$\int \frac{xdx}{e^x} = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} \text{ , отже:}$$

$y' = -xe^{-x} - e^{-x} - \frac{5}{4}x^4 + \sin x + C_1$. Тепер інтегруємо ще раз отримане диференціальне рівняння

$$\int y'dx = -\int xe^{-x}dx - \int e^{-x}dx - 5/4 \int x^4 dx + \int \sin xdx +$$

</td></tr>
</table>

$$+\int C_1 dx + C_2$$

та знаходимо його загальний розв'язок:

$$y = -(xe^{-x} - e^{-x}) + e^{-x} - x^5/5 - \cos x + C_1 x + C_2\,,$$

$$y = xe^{-x} + 2e^{-x} - x^5/5 - \cos x + C_1 x + C_2\,.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y^{(4)} = e^{x/7} - 8\sqrt[5]{x} + \sin(1-x)\,.$$

<u>*Розв'язання*</u>: Задане рівняння – це рівняння, яке містить y'' і змінну x. Інтегруємо це рівняння: $\int y^{(4)} dx = \int e^{x/7} dx - \int 8\sqrt[5]{x} dx + \int \sin(1-x) dx$, отримаємо: $y^{(3)} = 7e^{x/7} - 40/6\sqrt[5]{x^6} + \cos(1-x) + C_1$, інтегруємо другий раз:

$$\int y^{(3)} dx = 7\int e^{x/7} dx - 40/6\int \sqrt[5]{x^6} dx + \int \cos(1-x) dx + \int C_1 dx\,,$$

отримаємо: $y^{(2)} = 49e^{x/7} - 100/33\sqrt[5]{x^{11}} - \sin(1-x) + C_1 x + C_2$,

інтегруємо третій раз:

$$y' = 343e^{x/7} - 500/528\sqrt[5]{x^{16}} - \cos(1-x) + C_1\, x^2/2 + C_2 x + C_3$$

і останній – четвертий:

$$y = 2401e^{x/7} - 625/2772\sqrt[5]{x^{21}} + \sin(1-x) + C_1\, x^3/6 + C_2\, x^2/2 +$$
$$+ C_3 x + C_4$$

II тип Рівняння, які не містять шукану функцію	Це рівняння, що має вигляд $F(x, y', y'') = 0$. <u>*Розв'язання:*</u> Порядок рівняння знижують за допомогою підстановки $y' = z(x)$,

	де $z(x)$ - нова шукана функція. Ця підстановка приводить до рівняння виду: $F(x,z,z')=0$, тобто до рівняння першого порядку, рішення яких ми розглядали у попередньому розділі.

ПРИКЛАД 1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'\cdot y''=1.$$

Розв'язання: Задане рівняння – це рівняння другого порядку, яке не містить y. Знизимо його порядок за допомогою підстановки: $y'=z(x)$, $z'=y''$, тоді:

$$z\cdot z'=1;\ z\cdot dz/dx=1;\ zdz=dx;\ \int zdz=\int dx;\ z^2/2=x+C_1;$$

$z=\pm\sqrt{2x+2C_1}$; виконаємо обернену підстановку:

$$dy/dx=\pm\sqrt{2x+2C_1};\ dy=\pm\sqrt{2}\sqrt{x+C_1}dx;\ \int dy=\pm\sqrt{2}\int\sqrt{x+C_1}dx;$$

$y=\pm\sqrt{2}\sqrt{(x+C_1)^3}\Big/(3/2)+C_2$ - загальний розв'язок рівняння.

ПРИКЛАД 2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$xy''=2y'.$$

Розв'язання: Задане рівняння – це рівняння другого порядку, яке не містить функцію y. Знизимо його порядок за допомогою підстановки: $y'=z(x)$, $z'=y''$, тоді:

$z=(C_1x)^2$;

$$x\cdot z'=2z;\ x\cdot\frac{dz}{dx}=2z;\ \frac{dz}{z}=2\frac{dx}{x};\ \int\frac{dz}{z}=\int 2\frac{dx}{x};$$

$$\int\ln|z|=2\ln|x|+2\ln C_1;\ \ln|z|=\ln(C_1x)^2;\ z=(C_1x)^2;$$

виконаємо обернену підстановку: $y' = (C_1 x)^2;\ \dfrac{dy}{dx} = (C_1 x)^2;\ dy = (C_1 x)^2 dx;\ \int dy = C_1^2 \int x^2 dx;$ $y = C_1^2 \dfrac{x^3}{3} + C_2$ - загальний розв'язок рівняння.	
III тип Рівняння, які не містять незалежну змінну	Це рівняння, що має вигляд $F(y, y', y'') = 0$. *Розв'язання:* Порядок рівняння знижують за допомогою підстановки $y' = p(y)$, де $p(y)$ - нова шукана функція. В цьому випадку за незалежну змінну вважають не x, а y. Тому друга похідна дорівнює: $y'' = p' \cdot y' = p' \cdot y$. Ця підстановка приводить до рівняння виду: $F(y, p, p') = 0$, тобто до рівняння першого порядку, рішення яких ми розглядали у попередньому розділі. Якщо вдається знайти загальний розв'язок цього рівняння,то воно має вигляд: $F(y, p, C_1) = 0$. Так як $p = dy/dx$, то рівняння $F(y, p, C_1) = 0$ це рівняння першого порядку, з якого можна визначити шукану функцію y. *Частинний випадок.* Якщо рівняння $F(y, y', y'') = 0$ має вигляд $F(y, y'') = 0$ (1) і його можна розв'язати відносно y'' так, що $y'' = \varphi(y)$, то інтегрування, окрім

<table>
<tr><td></td><td>
розглянутого прийому, можна провести таким чином: помножимо обидві його частини на $2y'dx$ і приведемо рівняння до виду

$$2y'y''dx = 2\varphi(y)y'dx \qquad (2).$$

Ліва частина цього рівняння $2y'y''dx = d(y'^2)$, а у правій частині $y'dx = dy$, тому (2) буде мати вигляд $d(y'^2) = 2\varphi(y)dy$.

Звідси випливає, що $y'^2 = 2\int \varphi(y)dy + C_1$;

$y' = \sqrt{2\int \varphi(y)dy + C_1}$. Отримане рівняння допускає розділення змінних. Інтегруємо його і отримаємо

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int \varphi(y)dy + C_1}},$$

тобто визначимо x як функцію y.

До рівняння виду (1) зводяться також і рівняння виду $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$, які містять лише дві похідні, порядок яких відрізняється на дві одиниці. В цьому випадку застосовуємо підстановку

$$y^{(n-2)} = p(x).$$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
ПРИКЛАД 1. Знайти загальний розв’язок рівняння:

$$yy'' = y'(1 + y').$$

<u>Розв’язання</u>: Задане рівняння – це рівняння другого

порядку, яке не містить змінну x. Знизимо його порядок за допомогою підстановки: $y' = p(y)$,
</td></tr>
</table>

$y'' = p'y' = p'p$, тоді: $y \cdot p'p = p(1+p)$; $p(yp'-1-p)=0$; $p=0$ або $yp'-1-p=0$; $y'=0$ або $yp'=1+p$; $dy=0$ або $y\dfrac{dp}{dy}=1+p$; $y_1=C$ або

$$\frac{dp}{p+1}=\frac{dy}{y};\ \int\frac{dp}{p+1}=\int\frac{dy}{y};\ln|1+p|=\ln|C_1y|;$$

$1+p=C_1y$; $p=C_1y-1$, виконаємо обернену заміну:

$$y'=C_1y-1;\frac{dy}{dx}=C_1y-1;\frac{dy}{(C_1y-1)}=dx;\ \int\frac{dy}{(C_1y-1)}=\int dx;$$

$\dfrac{1}{C_1}\ln|C_1y-1|=x+C_2$ - загальний розв'язок рівняння у неявному вигляді.

ПРИКЛАД 2. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y''=128y^3,\ y(0)=1,\ y'(0)=8.$$

<u>*Розв'язання*</u>: Задане рівняння – це рівняння другого порядку, яке не містить змінну x. Знизимо його порядок за допомогою підстановки: $y'=p(y)$,

$y''=p'y'=p'p$, тоді: $p'p=128y^3$; $\dfrac{pdp}{dy}=128y^3$;

$$pdp=128y^3dy;\ \int pdp=128\int y^3dy;$$

$$\frac{p^2}{2}=\frac{128y^4}{4}+C_1;\ p^2=64y^4+2C_1;\ p=\pm\sqrt{64y^4+2C_1};$$

виконаємо обернену заміну:

$y'=\pm\sqrt{64y^4+2C_1}$; підставимо у y' початкові умови, тоді

$$8=\pm\sqrt{64\cdot1+2C_1};64=64+2C_1;\ C_1=0\Rightarrow y'=\pm\sqrt{64y^4};$$

$$y'=\pm8y^2;\frac{dy}{dx}=\pm8y^2;\ \frac{dy}{y^2}=\pm8dx;\int\frac{dy}{y^2}=\pm8\int dx;$$

$\frac{-1}{y} = \pm 8x + C_2$ - загальний розв'язок рівняння у неявному вигляді. Підставимо початкові умови у загальний розв'язок:

$$\frac{-1}{1} = 0 + C_2;\ C_2 = -1 \Rightarrow \frac{-1}{y} = \pm 8x - 1;\ y = \frac{1}{1 \pm 8x}$$ -

частинний розв'язок рівняння.

ПРИКЛАД 3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y^3 y'' = -1.$$

<u>Розв'язання</u>: Задане рівняння – це рівняння другого порядку, яке не містить змінну x. Запишемо рівняння в такому вигляді: $y'' = -1/y^3$. Помножимо обидві частини на $2y'dx$ і отримаємо $2y'y''dx = -2y'dx/y^3$. Але $y'dx = dy$, а тому маємо $d(y'^2) = -2dy/y^3$. Інтегруємо і отримуємо $y'^2 = \frac{1}{y^2} + C_1;\ y' = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1};\ y' = \pm\frac{\sqrt{1 + C_1 y^2}}{y}$. Розділяємо змінні $\pm\frac{ydy}{\sqrt{1 + C_1 y^2}} = dx$, інтегруємо другий раз і отримуємо $\pm\frac{\sqrt{1 + C_1 y^2}}{C_1} = x + C_2$. Так як C_1 може бути величиною як від'ємною, так і додатною , то знаки $\pm$ перед коренем можна не писати. Тоді остаточно загальний розв'язок має вигляд $\sqrt{1 + C_1 y^2} = C_1 x + C_2$, де $C_2 = C_1 C_2$.

2.3 Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі змінними коефіцієнтами

Лінійні диференці-альні рівняння n-го порядку	$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + + p_n(x)y = f(x),$$ де $f(x)$ - функція незалежної змінної x, за якою обчислені похідні. *Зауваження:* шукана функція y і всі її похідні входять в це рівняння у першому степені. Функції $p_i(x),\ i = 1,\ldots,n$ і права частина рівняння – функція $f(x)$ неперервні на проміжку (a,b). Функції $p_i(x)$ називаються коефіцієнтами рівняння.
Лінійні однорідні диференці-альні рівняння n-го порядку	Якщо права частина $f(x)$ тотожно дорівнює нулю на проміжку (a,b), то рівняння набуває такого вигляду $$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + + p_n(x)y = 0$$ і називається *лінійним однорідним* рівнянням n-го порядку. Загальний розв'язок *лінійного однорідного* рівнянням n-го порядку має вигляд $$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x),$$ де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - довільні сталі, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння. Розглянемо розв'язання ЛОДР 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами.

	Зауваження. Якщо $y_1(x)$ частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку виду $$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$ то його другий частинний розв'язок, лінійно незалежний з першим, знаходиться за формулою $$y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}dx}{y_1^2}.$$ **ПРИКЛАД.** Відомо, що $y = e^x$ розв'язок рівняння $y'' - \frac{x+1}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$. Знайти другий лінійно незалежний розв'язок. *Розв'язання*: Задане рівняння – це лінійне однорідне рівняння другого порядку, його другий частинний розв'язок, лінійно незалежний з першим, знайдемо за формулою: $y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}dx}{y_1^2}$, де $-\int p_1(x)dx = \int \frac{x+1}{x}dx = \int dx + \int \frac{dx}{x} = x + \ln\lvert x\rvert,$ $(C = 0)$, тоді: $e^{-\int p_1(x)dx} =$ $= e^{x+\ln\lvert x\rvert} = e^x \cdot e^{\ln\lvert x\rvert} = e^x x$. Отже, $y_2 = y_1\int \frac{e^x x dx}{(e^x)^2} = e^x\int \frac{xdx}{e^x} =$ $= \left\lvert \begin{matrix} u = x;\ du = dx \\ dv = e^x;\ v = -e^{-x} \end{matrix} \right\rvert = e^x\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) =$ $= e^x\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) = -x - 1.$

	Отже, $y_2 = -x - 1$ - другий лінійно незалежний розв’язок диференціального рівняння.
Лінійні неоднорідні диферен-ціальні рівняння n-го порядку.	Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називається *лінійним неоднорідним* рівнянням n-го порядку: $$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$ де $f(x) \neq 0$. Загальний розв’язок *лінійного неоднорідного* рівняння знаходять так: 1) знаходять який-небудь один його частинний розв’язок; 2) знаходять загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння; 3) сума цих двох розв’язків і буде загальним розв’язком неоднорідного рівняння. Тоді загальний розв’язок неоднорідного рівняння має вигляд: $$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + Y_{чн},$$ де $Y_{чн}$ - частинний розв’язок неоднорідного рівняння, $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ - загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння.

2.4 Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами

Лінійні однорідні диференці-альні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами	$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0$, де a_i $(i=1,2,...,n)$ - дійсні числа, y - шукана функція, x - незалежна змінна. $k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+...+a_{n-1}k'+a_nk=0$ - характеристичне рівняння. 1. Якщо $k_1,k_2,...,k_n$ - дійсні не рівні між собою числа, то $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+...+C_ne^{k_nx}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння. 2. Якщо $k_1,k_2,...,k_n$ - дійсні числа, але серед них є рівні, то кожному кореню k_i кратності l відповідає l лінійно незалежних частинних розв'язків, тоді $y=C_1e^{k_ix}+C_2xe^{k_ix}+C_3x^2e^{k_ix}...+C_nx^{l-1}e^{k_ix}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння. 3. Якщо серед коренів характеристичного рівняння є комплексні, але не рівні між собою, то кожній парі спряжених комплексних коренів $\alpha+\beta i$ і $\alpha-\beta i$ відповідають два частинних лінійно незалежних розв'язки рівняння вигляду $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$. 4. Якщо серед комплексних коренів ха-рактеристичного рівняння є кратні комп-лексні корені, то кореню $\alpha+\beta i$ кратності l (корінь $\alpha-\beta i$ має таку ж кратність)

	відповідає $2l$ частинних лінійно незалежних рішення однорідного рівняння, які мають вигляд $e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,..., x^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,..., x^{l-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

2.5 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Лінійні однорідні диференці-альні рівняння 2-го порядку з постійним и коефіцієн-тами (ЛОДР)	$ay'' + by' + cy = 0$, де a, b, c - дійсні числа, y - шукана функція; $ak^2 + bk + c = 0$ - характеристичне рівняння; $D = b^2 - 4ac$. 1) $D > 0 \Rightarrow k_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; y_0 = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ - загальний розв'язок ЛОДР. **ПРИКЛАД.** Знайти розв'язок задачі Коші рівняння $y'' + 3y' + 2y = 0$, якщо $y(0) = -1,\ y'(0) = 3$. *Розв'язання*: Це ЛОДР 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння: $k^2 + 3k + 2 = 0$, D>0, за теоремою Вієта $\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = 2 \\ k_1 + k_2 = -3 \end{cases}; \begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow y_0 = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$ - загальний розв'язок ЛОДР.

Щоб розв'язати задачу Коші, знайдемо похідну загального розв'язку:

$y_0' = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x})' = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x}$.

Підставимо початкові умови $y(0) = -1,\ y'(0) = 3$ в похідну і в загальний розв'язок ЛОДР:

$$\begin{cases} -1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ 3 = -2C_1 e^0 - C_2 e^0 \end{cases}; \begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ -2C_1 - C_2 = 3 \end{cases}; \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = -2 \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок ЛОДР:

$$y_ч = -2e^{-2x} + e^{-x}.$$

2) $D = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dfrac{-b}{2a} = k;\ y_0 = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$ - загальний розв'язок ЛОДР.

ПРИКЛАД. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 22y' + 121y = 0$.

<u>*Розв'язання*</u>: Це ЛОДР 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння: $k^2 + 22k + 121 = 0$, $D=0$, за теоремою Вієта

$$\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = 121 \\ k_1 + k_2 = -22 \end{cases}; k_1 = k_2 = -11 \Rightarrow y_0 = e^{-11x}(C_1 + C_2 x)$$

- загальний розв'язок ЛОДР.

3) $D < 0 \Rightarrow k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ *комплексні корені*,

$y_0 = C_1 e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ - загальний розв'язок ЛОДР.

ПРИКЛАД. Знайти загальний розв'язок

	рівняння $y''+9y=0$. *Розв'язання*: Це ЛОДР 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння: $k^2+9=0; k^2=-9; k_{1,2}=\pm 3i;\ \alpha=0;\ \beta=3 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_0=C_1e^0(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)=$ $=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ - загальний розв'язок ЛОДР.
Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (ЛНДР)	$$ay''+by'+cy=f(x),$$ де a,b,c - дійсні числа, y - шукана функція; $f(x)$ - спеціальна права частина. $$y=y_0+\bar{y}\ -$$ вид загального розв'язку ЛНДР, де y_0 - загальний розв'язок ЛОДР, $\bar{y}$ - частинний розв'язок ЛНДР, вигляд якого залежить від вигляду $f(x)$. Розглянемо види правої частини ЛНДР і вигляд $\bar{y}$ частинного розв'язку:

Вигляд правої частини $f(x)$	Корені характеристичного рівняння	Вигляд частинного розв'язку ЛНДР, $\bar{y}$
$f(x)=P_n(x)e^{mx}$	$m\neq k_1$; $m\neq k_2$	$\bar{y}=\overline{P_n(x)}\cdot e^{mx}$
	$m=k_1$;	$\bar{y}=x\overline{P_n(x)}e^{mx}$

	$m \neq k_2$	
	$m = k_1$; $m = k_2$	$\bar{y} = x^2 \overline{P_n(x)} e^{mx}$

ПРИКЛАД 1 . Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}.$$

Розв'язання: Це ЛНДР 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Його загальний розв'язок має вигляд $y = y_0 + \bar{y}$. Щоб знайти y_0, запишемо характеристичне рівняння: $k^2 - 10k + 25 = 0$, D=0, за теоремою Вієта $\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = 25 \\ k_1 + k_2 = 10 \end{cases}; k_1 = k_2 = 5 \Rightarrow y_0 = e^{5x}(C_1 + C_2 x)$ - загальний розв'язок ЛОДР. Тепер знайдемо $\bar{y}$ за виглядом правої частини $f(x) = e^{5x}$, так як $k_1 = k_2 = 5 = m \Rightarrow \bar{y} = x^2 \cdot Ae^{5x}$, знайдемо $\bar{y}', \bar{y}''$: $\bar{y}' = 5Ae^{5x}x^2 + 2Axe^{5x} = e^{5x}(5Ax^2 + 2Ax)$, $\bar{y}'' = 5Ae^{5x}(5x^2 + 2x) + Ae^{5x}(10x + 2) = Ae^{5x}(25x^2 + 20x + 2)$.

Підставимо $y, \bar{y}', \bar{y}''$ в ЛНДР:

$Ae^{5x}(25x^2 + 20x + 2) - 10Ae^{5x}(5x^2 + 2x) + 25Ae^{5x}x^2 = e^{5x}$,

$25Ax^2 + 20Ax + 2A - 50Ax^2 - 20Ax + 25Ax^2 = 1$,

$2A = 1,\ A = 1/2 \Rightarrow \bar{y} = 1/2\, e^{5x}x^2$ - частинний розв'язок ЛНДР.

Отже, $y = e^{5x}(C_1 + C_2 x) + 1/2\, e^{5x}x^2$ - загальний розв'язок ЛНДР.

ПРИКЛАД 2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - y' - 6y = 2xe^{3x}.$$

Розв'язання: Це ЛНДР 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Його загальний розв'язок має вигляд $y = y_0 + \bar{y}$. Щоб знайти y_0, запишемо характеристичне рівняння: $k^2 - k - 6 = 0$, $D>0$, за теоремою Вієта $\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = -6 \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases}; k_1 = 3; k_2 = -2 \Rightarrow y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$ - загальний розв'язок ЛОДР. Тепер знайдемо $\bar{y}$ за виглядом правої частини $f(x) = 2xe^{3x}$, так як $k_1 = 3;\ k_2 \neq 3 \Rightarrow \bar{y} = (Ax + B) \cdot e^{3x} x = (Ax^2 + Bx) \cdot e^{3x}$, знайдемо $\bar{y}',\ \bar{y}''$:

$$\bar{y}' = (2Ax + B)e^{3x} + (Ax^2 + Bx)3e^{3x} = e^{3x}(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B)$$

$$\bar{y}'' = 3e^{3x}(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B) + e^{3x}(6Ax + 2A + 3B) =$$

$$= e^{3x}(9Ax^2 + 6Ax + 3B + 9Bx + 2A + 6Ax + 3B) =$$

$$= e^{3x}(9Ax^2 + 12Ax + 6B + 9Bx + 2A)$$

Підставимо $y, \bar{y}',\ \bar{y}''$ в ЛНДР:

$$e^{3x}(9Ax^2 + 12Ax + 6B + 9Bx + 2A) - e^{3x}(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B) -$$

$$-6e^{3x}(Ax^2 + Bx) = 2xe^{3x} \quad \Big|: e^{3x},$$

$$9Ax^2 + 12Ax + 9Bx + 2A + 6B - 3Ax^2 - 2Ax - 3Bx - B - 6Ax^2 -$$

$-6Bx = 2x$, порівняємо коефіцієнти у двох частинах рівняння:

при x: $10A = 2;\ A = 1/5$;

при x^0 : $2A + B = 0;\ B = -2/5$.

Підставимо $A;\ B$ у $\bar{y} : \bar{y} = (1/5\,x - 2/5)e^{3x}x$ - частинний розв'язок ЛНДР.

Отже, $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + (1/5\,x - 2/5)e^{3x}x$ - загальний розв'язок ЛНДР.

ПРИКЛАД 3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + 9y = 6e^{3x}.$$

<u>*Розв'язання*</u>: Це ЛНДР 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Його загальний розв'язок має вигляд $y = y_0 + \bar{y}$. Щоб знайти y_0, запишемо характеристичне

рівняння: $k^2+9=0$, $D<0$, $k^2=-9$; $k_1=\pm 3i \Rightarrow y_0=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ - загальний розв'язок ЛОДР. Тепер знайдемо $\bar{y}$ за виглядом правої частини $f(x)=6e^{3x}$, так як $k_1\neq k_2\neq 3 \Rightarrow \bar{y}=A\cdot e^{3x}$, знайдемо $\bar{y}'$, $\bar{y}''$: $\bar{y}'=3Ae^{3x}$; $\bar{y}''=9Ae^{3x}$.
Підставимо $y, \bar{y}', \bar{y}''$ в ЛНДР:

$$9Ae^{3x}+9Ae^{3x}=6e^{3x}\ \Big|: e^{3x};\ 18A=6;\ A=1/3 \Rightarrow \bar{y}=1/3e^{3x}$$ -

частинний розв'язок ЛНДР.
Отже, $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+1/3e^{3x}$ - загальний розв'язок ЛНДР.

$f(x)=\overline{P}_n(x)^*$	$k_1\neq 0$; $k_2\neq 0$	$\bar{y}=P_n(x)$
	$k_1=0$; $k_2\neq 0$	$\bar{y}=x\cdot P_n(x)$
	$k_1=0$; $k_2=0$	$\bar{y}=x^2\cdot P_n(x)$

ПРИКЛАД 1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y''+36y=36+66x-36x^3.$$

<u>*Розв'язання*</u>: Це ЛНДР 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Його загальний розв'язок має вигляд $y=y_0+\bar{y}$. Щоб знайти y_0, запишемо характеристичне рівняння: $k^2+36=0$, $D<0$, $k^2=-36$; $k_1=\pm 6i \Rightarrow y_0=C_1\cos 6x+C_2\sin 6x$ - загальний розв'язок ЛОДР. Тепер знайдемо $\bar{y}$ за виглядом правої частини $f(x)=36+66x-36x^3$, так як

$k_1 \neq k_2 \neq 0 \Rightarrow \bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, знайдемо $\bar{y}', \bar{y}''$: $\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C$; $\bar{y}'' = 6Ax + 2B$. Підставимо $y, \bar{y}', \bar{y}''$ в ЛНДР:

$6Ax + 2B + 36Ax^3 + 36Bx^2 + 36Cx + 36D = 36 + 66 - 36x^3$, порівняємо коефіцієнти в обох частинах рівності:

при $x^3: 36A = -36 \Rightarrow A = -1;$

при $x^2: 36B = 0 \Rightarrow B = 0;$

при $x: 6A + 36C = 66 \Rightarrow C = 2;$

при $x^0: 2B + 36D = 36 \Rightarrow D = 1$.

Тоді: $\bar{y} = -x^3 + 2x + 1$- частинний розв'язок ЛНДР.

Отже, $y = C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x - x^3 + 2x + 1$ - загальний розв'язок ЛНДУ.

ПРИКЛАД 2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - 2y' = 1 + 3x^2.$$

<u>*Розв'язання*</u>: Це ЛНДР 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Його загальний розв'язок має вигляд $y = y_0 + \bar{y}$. Щоб знайти y_0, запишемо характеристичне рівняння: $k^2 - 2k = 0;\ k(k-2) = 0$, $D>0$, $k_1 = 0;\ k_2 = 2 \Rightarrow y_0 = C_1 + C_2 e^{2x}$ - загальний розв'язок ЛОДР. Тепер знайдемо $\bar{y}$ за виглядом правої частини $f(x) = 1 + 3x^2$, так як $k_1 = 0; k_2 \neq 0 \Rightarrow \bar{y} = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx$, знайдемо $\bar{y}', \bar{y}''$: $\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C$; $\bar{y}'' = 6Ax + 2B$. Підставимо $y, \bar{y}', \bar{y}''$ в ЛНДР:

$6Ax + 2B - 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = 1 + 3x^2$, порівняємо коефіцієнти в обох частинах рівності: при $x^2: -6A = 3 \Rightarrow A = -1/2;$

при $x: 6A - 4B = 0 \Rightarrow B = -3/4;$

при $x^0: 2B - 2C = 1 \Rightarrow C = -5/4$.

Тоді: $\bar{y}=-1/2\,x^3-3/4\,x^2-5/4$ - частинний розв'язок ЛНДР.
Отже, $y=C_1+C_2e^{2x}-1/2\,x^3-3/4\,x^2-5/4$ - загальний розв'язок ЛНДР.

$f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$	$\pm\beta i\neq k_{1,2}$	$\bar{y}=A\cos\beta x+B\sin\beta x$
	$\pm\beta i=k_{1,2}$	$\bar{y}=x\left(A\cos\beta x+B\sin\beta x\right)$

ПРИКЛАД. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y''+4y'+20y=5\cos 4x-3\sin 4x\,.$$

<u>*Розв'язання*</u>: Це ЛНДР 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Його загальний розв'язок має вигляд $y=y_0+\bar{y}$. Щоб знайти y_0, запишемо характеристичне рівняння: $k^2+4k+20=0, D=16-80=-64$, $D<0$,
$k_1=(-4+8i)/2=-2+4i;\ k_2=(-4-8i)/2=-2-4i\Rightarrow$
$y_0=e^{-2x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$ - загальний розв'язок ЛОДР.
Тепер знайдемо $\bar{y}$ за виглядом правої частини $f(x)=5\cos 4x-3\sin 4x$, так як $k_1\neq k_2\neq\pm 4i\Rightarrow\bar{y}=A\cos 4x+B\sin 4x$, знайдемо $\bar{y}',\ \bar{y}''$:
$\bar{y}'=-4A\sin 4x+4B\cos 4x$; $\bar{y}''=-16A\cos 4x-16B\sin 4x$.
Підставимо $y,\bar{y}',\ \bar{y}''$ в ЛНДР:
$-16A\cos 4x-16B\sin 4x-16A\sin 4x+16B\cos 4x+20A\cos 4x+$
$+20B\sin 4x=5\cos 4x-3\sin 4x$, порівняємо коефіцієнти в обох частинах рівності:

при $\begin{array}{l}\cos 4x:\ 4A+16B=5;\ A=1/4\\ \sin 4x:-16A+4B=-3;\ B=1/4\end{array}.$

Тоді: $\bar{y}=1/4\cos 4x+1/4\sin 4x$ - частинний розв'язок ЛНДР.
Отже, $y=e^{-2x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)+1/4\cos 4x+1/4\sin 4x$ - загальний розв'язок ЛНДР.

Примітка: $\overline{P}_n(x)^*$ - це многочлен степені *n*, який має вигляд

$$\overline{P}_n(x)^* = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Rx^0$$

2.6 Системи диференціальних рівнянь

Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами (СЛДР)	$\begin{cases} dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1(t); \\ dx_2/dt = a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2(t); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n/dt = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n(n), \end{cases}$ де t - аргумент, $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ - шукані функції, $a_{ij}, i == \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$ - сталі коефіцієнти, $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ - вільні члени (відомі певні функції). Число n називається порядком системи. Розв'язком системи називається функція $X = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$.
Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь (ЛОСДР)	$\begin{cases} dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ dx_2/dt = a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n/dt = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$ система лінійних однорідних диференціальних рівнянь (СЛОДР). Її загальний розв'язок має вигляд лінійної комбінації $\overline{X} = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$, де $C_1, \ldots, C_n$ -

	довільні сталі, $X_1,...,X_n$ - лінійно незалежні частинні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему.

ПРИКЛАД. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь: $\begin{cases} dx/dt = -x + y, \\ dy/dt = -x - 3y. \end{cases}$

Розв'язання: Це ЛОСДР 1-го порядку з постійними коефіцієнтами. Розв'яжемо її методом вилучення. У системі x і y це невідомі функції, а t - незалежна мінна. Диференціюємо перше рівняння системи за змінною t: $x'' = -x' + y' \Rightarrow y' = x'' + x'$. Далі з першого рівняння системи виразимо y, тоді: $y = x' + x$. Підставимо x і x' в друге рівняння системи та отримэмо ЛОДР 2-го порядку: $x'' + x' = -x - 3(x' + x) \Rightarrow x'' + 4x' + 4x = 0$ -. Щоб знайти його розв'язок, запишемо характеристичне рівняння, яке й буде шуканим розв'язком ЛОДР: $k^2 + 4k + 4 = 0, (k+2)^2 = 0,\ k_1 = k_2 = -2 \Rightarrow x(t) = e^{-2t}(C_1 + C_2 t)$.

Щоб знайти $y(t)$, обчислимо $x'(t) = (e^{-2t}(C_1 + C_2 t))' =$

$$x'(t) = (e^{-2t}(C_1 + C_2 t))' = -2e^{-2t}(C_1 + C_2 t) + e^{-2t}C_2 =$$
$$= e^{-2t}(-2C_1 - 2C_2 t + C_2).$$

Тоді: $y = x' + x = e^{-2t}(-2C_1 - 2C_2 t + C_2) + e^{-2t}(C_1 + C_2 t) =$
$$= e^{-2t}(-C_1 - C_2 t + C_2).$$

Отже, розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x = e^{-2t}(-2C_1 - 2C_2 t + C_2), \\ y = e^{-2t}(-C_1 - C_2 t + C_2). \end{cases}$$

АБЕТКОВИЙ ВКАЗІВНИК

ДОДАТКИ

Додаток 1

Трансценде́нтна функція – аналітична функція, що не є алгебраїчною. Простими прикладами трансцендентних функцій є показникова функція, тригонометричні функції та обернені до них, логарифмічна функція.

Додаток 2

Примітка. Цього можна уникнути, якщо безпосередньо підставити корені цього добутку в отриманий загальний розв’язок диференціального рівняння.

Додаток 3

Зауваження. Однорідними функціями одного і того ж виміру n вважають такі функції, для яких при будь-якому k виконується тотожність

$$P(kx,ky)=k^nP(x,y),\ Q(kx,ky)=k^nQ(x,y).$$

Додаток 4

ПРИКЛАД. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'=\dfrac{2x-3y+11}{3x+y}$.

Розв’язання: Для цього рівняння $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2+9=11\neq 0$, де постійні x_0, y_0 знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases}2x-3y+11=0\\ 3x+y=0\end{cases}.$$

Після розв'язку системи отримуємо, що $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. Таким чином перетворення має вигляд $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v + 3 \end{cases}$, звідси $dx = du$, $dy = dv$. Підставимо все це в задане рівняння, отримаємо: $\frac{dv}{du} = \frac{2(u-1) - 3(v+3) + 11}{3(u-1) + v + 3}$ або $\frac{dv}{du} = \frac{2u - 3v}{3u + v}$.

Виконаємо підстановку $z = \frac{v}{u}$ або $v = uz$, звідси $\frac{dv}{du} = \frac{dz}{du}u + z$. Підставимо це, і тоді рівняння приймає такий вигляд $u\frac{dz}{du} + z = \frac{-3z + 2}{3 - z}$; $u\frac{dz}{du} = \frac{-3z + 2}{3 - z} - z$; $u\frac{dz}{du} = \frac{z^2 - 6z + 2}{3 - z}$. Це рівняння з відокремленими змінними загальний розв'язок якого має вигляд $\ln\left(z^2 - 6z + 2\right) + \ln u^2 = \ln C_1$. Підставимо вираз $z = \frac{v}{u}$ та перейдемо до змінних x, y, згідно формул $\begin{cases} x + 1 = u \\ y - 3 = v \end{cases}$, ми отримаємо шуканий загальний розв'язок диференціального рівняння, який матиме наступний вигляд

$$\ln\left[(y-3)^2 - 6(x+1)(y-3) + 2(x+1)^2\right] = \ln C_1;$$

$$(y-3)^2 - 6(x+1)(y-3) + 2(x+1)^2 = C_1;$$

$$y^2 - 12y + 29 - 6xy - 14x + 2x^2 = C_1.$$

Додаток 5

Примітка. Для рішення лінійного неоднорідного рівняння $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ можна застосовувати метод варіації довільної сталої. Цей метод полягає в тому, що спочатку знаходять загальний розв'язок рівняння $y' + p(x) \cdot y = 0$, тобто співвідношення $y = Ce^{-\int p(x)dx}$. Потім, вважаючи в цьому співвідношенні величину C функцією від x, шукають рішення неоднорідного рівняння $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ у вигляді співвідношення. Для цього в рівняння $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ підставляють вирази для y та y', та з отриманого диференціального рівняння знаходять функцію $C(x)$. Загальний розв'язок рівняння отримують в вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Додаток 6

Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = 0$$

Не є повним диференціалом та існує функція $\mu = \mu(x, y)$, прицьому така, що $\mu\left(Pdx + Qdy\right) = du$, то функція м називається *інтегруючим множником*.

Функція $\mu(x, y)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

Якщо $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$, то інтегруючий множник залежить лише від x, тобто $\mu = \mu(x)$. Якщо $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \varphi(y)$, то інтегруючий множник залежить лише від y, тобто $\mu = \mu(y)$.

Додаток 7

ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ (ЛОДУ)

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$$

Характеристичне рівняння: $ak^2 + bk + c = 0$

Дискри мінант	Корені характеристич ного рівняння	Загальне рішення ЛОДУ, y_0
$D > 0$	$k_1 \neq k_2$; $k_1 \in R; k_2 \in R$	$y_0 = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$
$D = 0$	$k_1 = k_2$; $k_1 \in R; k_2 \in R$	$y_0 = \left(C_1 + C_2 \cdot x\right) \cdot e^{k_1 x}$
$D < 0$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_0 = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$

ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ (ЛНДУ)

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x)}$$

Загальне рішення ЛНДУ: $y_{о.н.} = y_о + \bar{y}$,

де $y_о$ *– це загальне рішення ЛОДУ,* $\bar{y}$ *- це частинне рішення ЛНДУ, вигляд якого залежить від вигляду функції* $f(x)$

Вигляд функції $f(x)$	Корені характе-ристичного рівняння	Вигляд частинного рішення ЛНДУ, $\bar{y}$
$f(x) = ae^{mx}$	$m \neq k_1$; $m \neq k_2$	$\bar{y} = Ae^{mx}$
	$m = k_1$; $m \neq k_2$	$\bar{y} = x \cdot Ae^{mx}$
	$m = k_1$; $m = k_2$	$\bar{y} = x^2 \cdot Ae^{mx}$
$f(x) = \overline{P}_n(x)^*$	$k_1 \neq 0$; $k_2 \neq 0$	$\bar{y} = P_n(x)$
	$k_1 = 0$; $k_2 \neq 0$	$\bar{y} = x \cdot P_n(x)$
	$k_1 = 0$; $k_2 = 0$	$\bar{y} = x^2 \cdot P_n(x)$
$f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$	$\beta i \neq k_{1,2}$	$\bar{y} = A\cos\beta x + B\sin\beta x$
	$\beta i = k_{1,2}$	$\bar{y} = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Примітка: $\overline{P}_n(x)^*$ – це многочлен степені *n*, який має вигляд

$$\overline{P}_n(x)^* = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Rx^0$$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа : для втузов. – 7-е изд., стереотипное. / А. Ф. Бермант , И. Г. Араманович. – Москва : Наука, 1971. – 735 с.
2. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. / М. Я. Выгодский – Москва : Наука, 1973. – 872 с.
3. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2001. – 471 с.
4. Гусак А. А. Справочное пособие по решению задач: математичний аналіз. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 228 с.
5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : Наука, 1986. – Ч. 1. – 303 с., Ч. 2 – 415 с.
6. Колосов А. І. Вища математика для економістів: у 2-х модулях. Модуль 1, 2 : конспект лекцій (для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 «Економіка підприємства» і 6.030509 «Облік і аудит») / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2014. – 237 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/35973/
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : для втузов. – Том 1. – 8-е изд., стереотипное. / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1968. – 552 с.

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВА Ганна Анатоліївна,
ЛАМТЮГОВА Світлана Миколаївна,
СИТНИКОВА Юлія Валеріївна

**ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
В СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ**
Частина 2

Навчальний довідник
для самостійного вивчення курсу вищої математики
(для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання
за напрямами підготовки 6.060101 – Будівництво,
6.050702 – Електромеханіка», 6.050701 – Електротехніка
та електротехнології)

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Ю. В. Ситникова*

План 2015р., поз. 132М

Підп. до друку 11.02.2016 р. Формат 60*84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 6
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства
імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.